საქართველოს უნივერსიტეტი
და
ნორვეგიის არქტიკული უნივერსიტეტი

შემოსაზღვრული ოპერატორები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

გიორგი თუთბერიძე

giorgi.tutberidze1991@gmail.com

სადოქტორო ნაშრომი

საქართველოს უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტი

მეცნიერების და ტექნოლოგიების სკოლა

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს უნივერსიტეტის მეცნიერების და ტექნოლოგიების სკოლის მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გიორგი ტეფნაძე

თანახელმძღვანელები: ლარს-ერიკ პერსონი და დაგ ლუკასენი

თბილისი

2021

გიორგი თუთბერიძე

სარჩევი

გიორგი თუთბერიძე

საკვანძო სიტყვები: ვილენკინის ჯგუფი, ვილენკინის სისტემა, ლებეგის სივრცე, სუსტი-L_p სივრცე, უწყვეტობის მოდული, ვილენკინ-ფურიეს კოეფიციენტები, ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები, ფეიერის საშუალო, T საშუალო, ნორლუნდის საშუალო, რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები, მარტინგალები, მარტინგალური ჰარდის სივრცე, მაქსიმალური ოპერატორი, ჰარდის ტიპის უტოლობები, მიახლოება.

აბსტრაქტი

პრობლემატიკა, რომლის დამუშავებასაც ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვა და სხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას. დამტკიცებულია არაერთი შესანიშნავი შედეგი კვლევის ისეთ ახალ მიმართულებებში, როგორებიცაა ვეივლეტ ანალიზი, გაბორის თეორია, დროით-სიხშირული ანალიზი, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნი, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი და ა.შ. ამის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიზეზია ის, რომ ეს სამეცნიერო წინსვლა მნიშვნელოვანია არა მხოლოდ ამ თეორიების განსავითარებლად, არამედ მათი გამოყენების მხრივ მათემატიკაში, პროგრამირებასა და სხვადასხვა სფეროებში. (მაგალითად, სიგნალის გადაცემის თეორია, მულტიპლექსირება, ფილტრაცია, სურათის გაუმჯობესება, კოდირების თეორია, ციფრული სიგნალის დამუშავება და ნიმუშების ამოცნობა და ა.შ.).

ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიიის გამოყენებით ფუნქციის იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, ვილენკინის (უოლშის) ფუნქციები წარმოადგენენს "მართკუთხა ტალღებს". ასეთი ტალღები უკვე ხშირად გამოიყენება ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, მედიცინაში, სიგნალთა გადაცემის თეორიაში, ფილტრაციის, გამოსახულების გაუმჯობესების და ციფრული სიგნალების დამუშავებისთვის. ამ მიმართულებების განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი გახდა ახალი ორთონორმირებული სისტემების განხილვა, რომელთა შორის ერთ-ერთი აქტუალურია უოლშის სისტემა. ეს ფუნქციები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, რაც აადვილებს თეორიული შედეგების კომპიუტერულ ალგორითმიზაციას და მათ პრაქტიკაში გამოყენებებს.

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას. ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები, რომელთა თვისებები ძირითადად განპირობებულია ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. უოლშის სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზეც შეიძლება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულების ილუსტრირება.

ჩემი დისერტაციის მიზანია განიხილოს, გამოიყენოს და განავითაროს ამ საინტერესო თეორიის უახლესი შედეგები, რომლებიც დაკავშირებულია თანამედროვე ჰარმონიულ ანალიზთან. კერძოდ, ჩვენ გამოვიკვლევთ ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების H_p ნორმებისთვის ზოგიერთ ახალ ჰარდის ტიპის უტოლობებს. უფრო მეტიც, უწყვეტობის მოდულებისთვის დადგენილი იქნება ისეთი აუცილებელ და საკმარის პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ფეირის საშუალოების ქვემიმდევრობების ნორმით კრებადობას. გარდა ამისა, ჩვენ განვიხილავთ რისისა და ნორლუნდის საშუალოებს. ჩვენ ასევე განვიხილავთ T საშუალებებს, რომლებიც ნორლუნდის შეჯამებადობის "შებრუნებული"არიან, მაგრამ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც მათი კოეფიციენტები არიან მონოტონური. ასევე დავამტკიცებთ, რომ ეს შედეგები განუზოგადებელია. ამ შედეგების გამოყენებით ასევე მივიღებთ ზოგიერთ კარგად ცნობილ და ახალ შედეგებს.

სადოქტორო ნაშრომი შეიცავს ოთხ თავს: შესავალი, კერძო ჯამები და ფეიერის საშუალოები H_p

სივრცეში, ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების T საშუალოები H_p სივრცეში, რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშალოები H_p სივრცეში. ჩვენ ახლა დაწვრილებით ავღწერთ თითოეული თავის ძირითად შინაარსს.

პირველი თავი შეიცავს ძირითად ფაქტებს ვილენკინის ჯგუფების და ფუნქციების შესახებ, ასევე კერძო ჯამების ფეიერეის საშუალოების, რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების, ნორლუნდის და T საშუალოების განმართებებს და საბაზისო თვისებებს, ამ თავში ასევე განხლილულია, ლებეგის და სუსტი ლებეგის სივრცეები და მარტინგალური ჰარდის სივრცეები.

მეორე თავი ეძღვნება ვილენკინის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობების შესწავლას. შემდეგ დამტკიცებული იქნება ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების H_p სივრცეში კრებადობის საკითხები. ამის შემდეგ, ეს შედეგები გამოყენებული იქნება, რათა უწყვეტობის მოდულებისთვის ვიპოვოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლთათვისაც სამართლიანია ფეიერის საშუალოების ნორმით კრებადობა. ასევე, ამ თავში დამტკიცებული იქნება ამ ძირითადი შედეგების განუზოგადებლობა.

მესამე თავში განხილული იქნება ვილენკინის სისტემების მიმართ T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა. ასევე დამტკიცებული იქნება ამ შედეგების განუზოგადებლობა. ამის შემდეგ, განხილული იქნება ამ საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები. მას შემდეგ რაც ფეიერის და რისის საშუალოები არის T საშუალოების კარგად ცნობილი მაგალითები, კერძო შემთხვევებში მიიღება ამ საშუალოებისთვის უკვე ცნობილი და ახალი შედეგები.

მეოთხე თავში განხილული იქნება რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები ვილენკინის სისტემებისთვის. კერძოდ, დავამტკიცებთ ვილენკინის სისტემებისთვის რისის საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები. უფრო მეტიც, დავამტკიცებთ ამ შედეგების სიზუსტეს მხოლოდ უოლშ-ფურიეს სისტემისთვის. შემდეგ, შევისწავლით ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობას. ასევე, ზოგიერთ შემთხვევაში შევისწავლით ამ საშუალოების და მათი ქვემიმდევრობების თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხებს ინტეგრებად ფუნქციათა ლებეგის სივრცეში.

Abstract

The classical Fourier Analysis has been developed in an almost unbelieved way from the first fundamental discoveries by name Fourier. Especially a number of wonderful results have been proved and new directions of such research has been developed e.g. concerning Wavelets Theory, Gabor theory, Time-Frequency Analysis, Fast Fourier Transform, Abstract Harmonic Analysis, etc. One important reason for this is that this development is not only important for improving the "State of the art but also for its importance in other areas of mathematics and also for several applications (e.g. theory of signal transmission, multiplexing, filtering, image enhancement, coding theory, digital signal processing and pattern recogni-tion).

The classical theory of Fourier series deals with decomposition of a function into sinusoidal waves. Unlike these continuous waves the Vilenkin (Walsh) functions are rectangular waves. The development of the theory of Vilenkin-Fourier series has been strongly influenced by the classical theory of trigonometric series. Because of this it is inevitable to compare results of Vilenkin series to those on trigonometric series. There are many similarities between these theories, but there exist differences also. Much of these can be explained by modern abstract harmonic analysis, which studies orthonormal systems from the point of view of the structure of a topological group.

The aim of my thesis is to discuss, develop and apply the newest developments of this fascinating theory connected to modern harmonic analysis. In particular, we investigate some new Hardy type inequalities for H_p norms of partial sums of Vilenkin-Fourier series. Moreover, we derive necessary and sufficient conditions for the modulus of continuity so that norm convergence of subsequences of Fejér means is valid. Furthermore, we consider Riesz and Nörlund logarithmic means. It is also proved that these results are the best possible in a special sense. As applications both some well-known and new results are pointed out. In addition, we investigate some T means, which are "inverse"summability methods of Nörlund, but only in the case when their coefficients are monotone.

The thesis contains four chapters: Preliminaries, Partial sums and Fejér means on H_p spaces, T means of Vilenkin-Fourier series on martingale Hardy spaces, Reisz and Nörlund logarithmoic means means on H_p spaces. We now continue by describing the main content of each of the chapters. We now continue by describing the main content of each of the chapters.

In Chapter 1 we first present some definitions, notations and basic facts about Vilenkin groups and systems, which are crucial for our further investigations. After that we also define partial sums and Fejér means, Riesz and Nörlund logarithmic means, Nörlund and T means with respect to Vilenkin systems and investigate their basic properties. Moreover, we define Lebesgue and weak-Lebesgue spaces and martingale Hardy spaces.

Chapter 2 is devoted to investigate some new Hardy type inequalities for H_p norms of partial sums and Fejér means with respect to Vilenkin systems. Next, we prove convergence of subsequences of Fejér means in H_p norm. After that we apply these results to find necessary and sufficient conditions for the modulus of continuity for which norm convergence of Fejér means hold.

We also prove sharpness of all our main results in this Chapter.

In Chapter 3 we consider boundedness of maximal operators of T means with respect to Vilenkin systems. We also prove that results are sharp in the special sense. After that we prove some new Hardy type inequalities for H_p norms of these summabilility methods. Since Fejér means, Riesz means are well-know examples of T means some well-known and new results are pointed out in these special cases.

In Chapter 4 we consider Riesz and Nörlund logarithmic means with respect to Vilenkin systems. In particular, we prove some new Hardy type inequalities for H_p norms of Riesz means with respect to Vilenkin systems. Moreover, we also prove sharpness of this result for only Walsh-Fourier series. Next, we investigate boundedness of maximal operators of Nörlund logarithmic means. In the special cases, we also investigate a.e. convergence of subsequences these means in the Lebesgue space of integrable functions.

წინასიტყვაობა

სადოქტორო ნაშრომს აქვს მონოგრაფიის სახე და ეყრდნობა შემდეგ პუბლიკაციებს:

[1] G. Tutberidze, A note on the strong convergence of partial sums with respect to Vilenkin system, J. Contemp. Math. Anal., 54, 6, (2019), 319–324.

[2] G. Tutberidze, Maximal operators of T means with respect to the Vilenkin system, Nonlinear Studies, 27, 4, (2020), 1–11.

[3] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, On the boundedness of subsequ ences of Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy spaces, Operators and Matrices, 14, 1 (2020), 283–294.

[4] G. Tephnadze, G. Tutberidze, A note on the maximal operators of the Nörlund logaritmic means of Vilenkin-Fourier series, Trans. of A. Razmadze Math. Inst., 174, 1 (2020), 107–112.

[5] D. Lukkassen, L.E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, Some inequalities related to strong convergence of Riesz logarithmic means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Appl., 2020, DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-020-02342-8.

[6] G. Tutberidze, Modulus of continuity and boundedness of subsequences of Vilenkin- Fejér means in the martingale Hardy spaces, Georgian Math. J., (to appear).

[7] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, P. Wall, Strong summability result of Vilenkin-Fejér means on bounded Vilenkin groups, Ukr. Math. J., (to appear).

დამატებით გამოქვეყნებული მაქვს რამდენიმე სტატია, რომლებიც არ არის გამოყენებული ამ სადოქტორო ნაშრომში:

1) G. Tutberidze and V. Tsagaraeishvili, Multipliers of Absolute Convergence, Mat. Zametki, 105, 3, (2019), 433–443.

2) G. Tutberidze and V. Tsagaraeishvili, Absolute convergence factors of Lipshitz class functions for general Fourier series, Georgian Math. J., (to appear).

3) G. Tutberidze and V. Tsagaraeishvili, Multipliers of a.e convergence of general Fourier series, Ukr. Math. J., (to appear).

4) G. Tutberidze, Sharp (H_p, L_p) type inequalities of maximal operators of T means with respect to Vilenkin systems, Mediterranean Journal of Mathematics , (in press).

შენიშვნა: სადოქტორო ნაშრომში პირველადაა დამტკიცებული რამდენიმე ისეთი ახალი შედეგი, რომელთა დამტკიცებაც არ მოიძებნება ზემოთ მოყვანილ სტატიებში.

მინდა მადლობა გადავუხდო ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს, პროფესორებს- გიორგი ტეფნაძეს, ლარს-ერიკ პერსონს და დაგ ლუკასენს ჩემდამი გაწეული ყურადღების, მათი მუდმივი მხარდაჭერისა და დახმარებისთვის.

მადლობა ჩემს ქართველ, შვედ და ნორვეგიელ კოლეგებს საქართველოს უნივერსიტეტიდან და ნორვეგიის არქტიკული უნივერსიტეტიდან, რადგან მათ გამოხატეს ინტერესი ჩემი კვლევების მიმართ და ასევე მადლობას ვუხდი მათ ნაყოფიერი დისკუსიებისთვის. უფრო მეტიც, მე ძალიან ვაფასებ თბილ და მეგობრულ ატმოსფეროს ამ უნივერსიტეტების მათემატიკის დეპარტამენტებში, რაც დამეხმარა კვლევების უფრო ეფექტურად და ნაყოფიერად ჩატარებაში.

ასევე მადლობას ვუხდი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორ ვახტანგ ცაგარეიშვილს უანგარო მხარდაჭერისთვის.

მინდა აღვნიშნო, რომ სამეცნიერო თანამშრომლობა და შეთანხმება საერთო სადოქტორო პროგრამის შესახებ საქართველოს უნივერსიტეტსა და ნორვეგიის არქტიკული უნივერსიტეტს შორის ძალიან მნიშვნელოვანი იყო ჩემთვის. განსაკუთრებით, დიდ მადლობას ვუხდი პროფესორ როლანდ დუდუჩავას საქართველოს უნივერსიტეტში, ამ მნიშვნელოვანი შეთანხმების რეალიზებისთვის.

მადლობას ვუხდი შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდს ფინანსური მხარდაჭერისთვის, რომელიც ძალიან მნიშვნელოვანი იყო ამ პროექტის წარმატებით დასრულებისთვის.

და ბოლოს, მადლობას ვუხდი ჩემს ოჯახს სიყვარულის, ურთიერთგაგების, მოთმინებისა და მუდმივი თანადგომისთვის.

გიორგი თუთბერიძე

1 შესავალი

1.1 ვილენკინის ჯგუფები და ფუნქციები

$\mathbb{N}_{+}$-ით აღვნიშნოთ მთელი დადებითი რიცხვების სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{+} \cup \{0\}$-ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე. $m := (m_0, m_1, \ldots)$-ით აღვნიშნოთ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა რომელიც არა ნაკლებია ვიდრე 2. $Z_{m_k} := \{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$-ით აღვნიშნოთ მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი მოდულით m_k.

G_m-ით ავღნიშნოთ ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს Z_{m_k} ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლს. ტოპოლოგია G_m ჯგუფზე არის თითოეულ Z_{m_k}-ზე არსებული დისკრეტული ტოპოლოგიების თვლადი პირდაპირი ნამრავლი, ხოლო μ ზომა G_m-ზე არის Z_{m_k}-ებზე არსებული

$$\mu_k\left(j\right) := 1/m_k \qquad \left(j \in Z_{m_k}\right)$$

ზომების პირდაპირი ნამრავლი და ის ემთხვევა ჰაარის ზომას G_m-ზე, სადაც $\mu\left(G_m\right) = 1$.

თუ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$, მაშინ G_m-ს ვუწოდებთ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფს, ხოლო თუ წარმომქმნელი მიმდევრობა m არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ G_m-ზე ვიტყვით, რომ ის არის შემოუსაზღვრელი ვილენკინის ჯგუფი.

ამ სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებს, ე.ი.განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} m_n < \infty$.

G_m ჯგუფის ელემენტებს წარმოდგენს შემდეგი სახის მიმდევრობები

$$x := (x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots) \qquad \left(x_j \in Z_{m_j}\right).$$

ვილენკინის ჯგუფზე მეტრიკა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\rho\left(x, y\right) := |x - y| := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{M_{k+1}}, \qquad \left(x \in G_m\right).$$

G_m ჯგუფის, როგორც ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისს წარმოადგენს შემდეგი ღია სიმრავლეები

$$\begin{aligned} I_0\left(x\right) &:= G_m, \\ I_n(x) &:= \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \qquad \left(x \in G_m, \ \ n \in \mathbb{N}\right). \end{aligned}$$

ვთქვათ

$$e_n := (0, \ldots, 0, x_n = 1, 0, \ldots) \in G_m \qquad \left(n \in \mathbb{N}\right).$$

ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-სთვის, თუ განვსაზღვრავთ $I_n := I_n\left(0\right)$ და $\overline{I_n} := G_m \backslash I_n$-სთვის, მაშინ

$$\overline{I_N} = \bigcup_{s=0}^{N-1} I_s \backslash I_{s+1} = \left(\bigcup_{k=0}^{N-2} \bigcup_{l=k+1}^{N-1} I_N^{k,l}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{N-1} I_N^{k,N}\right), \tag{1.1.1}$$

სადაც

$$I_N^{k,l} := \begin{cases} I_N(0,\ldots,0,x_k \neq 0, 0,...,0, x_l \neq 0, x_{l+1},\ldots,x_{N-1},\ldots), \\ \qquad k<l<N, \\ I_N(0,\ldots,0,x_k \neq 0, x_{k+1}=0,\ldots,x_{N-1}=0,x_N,\ldots), \\ \qquad l=N. \end{cases}$$

ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცის $(0<p<\infty)$ ნორმა (კვაზი-ნორმა, როცა $0<p<1$) არის განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$\|f\|_p := \left(\int_{G_m} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

სუსტი $-L_p(G_m)$ სივრცე შედგება ყველა ზომადი f ფუნქციებისგან, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{\lambda>0} \lambda\{\mu(f>\lambda)\}^{1/p} < +\infty.$$

$C(G_m)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმა განიმარტება შემდეგნაირად

$$\|f\|_C := \sup_{x\in G_m} |f(x)| < c < \infty.$$

P_n-ით აღვნიშნოთ ყველა ვილენკინის პოლინომების სიმრავლე, რომელთა რიგი არ აღემატება $n\in\mathbb{N}$-ს.

$f\in L_p(G_m)$ $(1\le p\le\infty)$-ის საუკეთესო მიახლოების რაოდენობრივი მაჩვენებელი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E_n(f,L_p) := \inf_{\psi\in P_n} \|f-\psi\|_p,$$

ხოლო იმ ელემენტს, რომლისთვისაც ეს ინფიმუმი მიიღწევა ეწორდება საუკეთესო მიახლოების ელემენტი.

$f\in L_p(G_m)$ და $f\in C(G_m)$ სივრცეებში ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განიმარტებიან შემდეგნაირად:

$$\omega_p\left(\frac{1}{M_n},f\right) := \sup_{h\in I_n} \|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|_p$$

და

$$\omega_C\left(\frac{1}{M_n},f\right) := \sup_{h\in I_n} \|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|_C.$$

m-მიმდევრობისთვის განვსაზღვროთ ეგრეთ წოდებული განზოგადებული ხარისხები:

$$M_0 := 1, \quad M_{k+1} := m_k M_k \quad (k\in\mathbb{N}),$$

მაშინ, ნებისმიერი $n\in\mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვი შეიძლება ცალსახად წარმოდგეს, როგორც

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j,$$

სადაც $n_j\in Z_{m_j}$ $(j\in\mathbb{N}_+)$ და მხოლოდ n_j-ის სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისაგან.

შემდეგ, ჩვენ განვმარტავთ ორთონორმირებულ სისტემას G_m-ზე რომელსაც ვუწოდებთ ვილენ-

კინის სისტემას.

პირველ რიგში განვმარტოთ კომპლექსური ცვლადის $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, განზოგადებული რადემახერის ფუნქციები შემდეგი გზით:

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k/m_k), \quad \left(i^2 = -1, \ \ x \in G_m, \ \ k \in \mathbb{N}\right).$$

ახლა, ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ვილენკინის სისტემა $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ G_m-ზე შემდეგნაირად:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ვილენკინის სისტემა არის ორთონორმირებული და სრული $L_2(G_m)$.

ცნობილია, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-თვის

$$\begin{aligned} |\psi_n(x)| &= 1, \\ \psi_n(x+y) &= \psi_n(x)\ \psi_n(y), \\ \psi_n(-x) &= \psi_{n^*}(x) = \overline{\psi}_n(x), \\ \psi_n(x-y) &= \psi_n(x)\ \overline{\psi}_n(y), \\ \psi_{n \hat{+} k}(x) &= \psi_s \psi_n(x), \quad (s, n \in \mathbb{N}, \quad x, y \in G_m). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $m \equiv 2$ ამ სისტემას ვუწოდებთ უოლშ-პალეის სისტემას.

1.2 კერძო ჯამები და ფეიერის საშუალოები ვილენკინის სისტემებისთვის

პირველ რიგში, შემოგვთავაზებთ ფურიეს ანალიზის კლასიკური განმარტებების რამდენიმე ანალოგს. თუ $f \in L_1(G_m)$ მაშინ ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ვილენკინის სისტემების მიმართ ფურიეს კოეფიციენტები, ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები, ფეიერის საშუალოები, დირიხლესა და ფეიერის გულები შესაბამისად:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &:= \int_{G_m} f \overline{\psi}_n d\mu, \qquad (n \in \mathbb{N}), \\ S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\, \psi_k, \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \\ \sigma_n f &:= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f, \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \\ D_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k, \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \\ K_n &:= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k, \qquad (n \in \mathbb{N}_+). \end{aligned}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \int_{G_m} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k (x-t)\, d\mu(t) \\ &= \int_{G_m} f(t)\, D_n(x-t)\, d\mu(t) \\ &= (f * D_n)(x). \end{aligned}$$

ცნობილია, რომ (დეტალებისთვის იხ. [4], [61] და [111]) ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის და $1 \leq s_n \leq m_n - 1$-თვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$D_{j+M_n} = D_{M_n} + \psi_{M_n} D_j = D_{M_n} + r_n D_j, \qquad j \leq (m_n - 1) M_n, \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} D_{M_n - j}(x) &= D_{M_n}(x) - \overline{\psi}_{M_n - 1}(-x) D_j(-x) \\ &= D_{M_n}(x) - \psi_{M_n - 1}(x) \overline{D}_j(x), \qquad j < M_n. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$D_{M_n}(x) = \begin{cases} M_n & x \in I_n \\ 0 & x \notin I_n \end{cases} \tag{1.2.3}$$

$$D_{s_n M_n} = D_{M_n} \sum_{k=0}^{s_n - 1} \psi_{k M_n} = D_{M_n} \sum_{k=0}^{s_n - 1} r_n^k \tag{1.2.4}$$

და

$$D_n = \psi_n \left(\sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j} \sum_{k=m_j - n_j}^{m_j - 1} r_j^k \right). \tag{1.2.5}$$

(1.2.3)-ის გამოყენებით გვექნება

$$\|D_{M_n}\|_1 = 1 < \infty. \tag{1.2.6}$$

ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D_k * f)(x) \\ &= \int_{G_m} f(t)\, K_n(x-t)\, d\mu(t) \\ &= (f * K_n)(x). \end{aligned}$$

სადაც K_n-ები არიან ფეიერის გულები.

ცნობილია, რომ (დეტალებისთვის იხ. [37]) ყოველი $n > t, \quad t, n \in \mathbb{N}$-თვის:

$$K_{M_n}(x) = \begin{cases} \frac{M_t}{1-r_t(x)}, & x \in I_t \backslash I_{t+1}, \qquad x - x_t e_t \in I_n, \\ \frac{M_n+1}{2}, & x \in I_n, \\ 0, & \text{სხვაგან}. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

უფრო მეტიც,

$$s_n M_n K_{s_n M_n} = \sum_{l=0}^{s_n-1} \left(\sum_{i=0}^{l-1} r_n^i \right) M_n D_{M_n} + \left(\sum_{l=0}^{s_n-1} r_n^l \right) M_n K_{M_n}. \tag{1.2.8}$$

ფეიერის გულების შემდეგი ტოლობა არის ძალიან მნიშვნელოვანი ჩვენი შემდგომი კვლევებისათვის (დეტალებისთვის იხ. ბლახოტა და ტეფნაძე [16]). კერძოდ, თუ

$$n = \sum_{i=1}^{r} s_{n_i} M_{n_i},$$

სადაც $n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 0$ და $1 \leq s_{n_i} < m_{n_i}$ ყოველი $1 \leq i \leq r$-თვის და

$$n^{(k)} = n - \sum_{i=1}^{k} s_{n_i} M_{n_i},$$

სადაც $0 < k \leq r$, მაშინ

$$nK_n = \sum_{k=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{k-1} r_{n_j}^{s_{n_j}} \right) s_{n_k} M_{n_k} K_{s_{n_k} M_{n_k}} + \sum_{k=1}^{r-1} \left(\prod_{j=1}^{k-1} r_{n_j}^{s_{n_j}} \right) n^{(k)} D_{s_{n_k} M_{n_k}}. \tag{1.2.9}$$

ცნობილია, რომ

$$\|K_n\|_1 < c < \infty. \tag{1.2.10}$$

განვმარტოთ კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} S^* f &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f|, \\ \sigma^* f &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_n f|. \end{aligned}$$

განვმარტოთ კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების შემდეგი შეზღუდული მაქსიმალური ოპერატორები:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^*_{\#} f &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{M_n} f|, \\ \widetilde{\sigma}^*_{\#} f &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_{M_n} f|. \end{aligned}$$

1.3 $\rho(n)$ და ლებეგის მუდმივი ვილენკინის სისტემებთვის

განვსაზღვროთ

$$\langle n\rangle := \min\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\} \text{ და } |n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\},$$

სადაც $M_{|n|} \leq n \leq M_{|n|+1}$. ავღნიშნოთ

$$\rho(n) := |n| - \langle n\rangle, \qquad \text{ყოველი} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

ნატურალური რიცხვებისთვის

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} n_j M_j \qquad \text{და} \qquad k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j M_j$$

განვმარტოთ

$$n \widehat{+} k := \sum_{i=0}^{\infty} (n_i \oplus k_i) M_{i+1}$$

და

$$n \widehat{-} k := \sum_{i=0}^{\infty} (n_i \ominus k_i) M_{i+1},$$

სადაც

$$a_i \oplus b_i := (a_i + b_i) \mathrm{mod} m_i, \qquad a_i, b_i \in Z_{m_i}$$

და $\ominus$ არის $\oplus$-ის შებრუნებული ოპერატორი.

$n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j M_j$ ნატურალური რიცხვებისთვის ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ $v(n)$ და $v^*(n)$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$v(n) := \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_{j+1} - \delta_j| + \delta_0, \qquad v^*(n) := \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^*,$$

სადაც

$$\delta_j = sign(n_j) = sign(\ominus n_j) \text{ და } \delta_j^* = |\ominus n_j - 1| \, \delta_j.$$

n-ური ლებეგის კონსტანტა განიმარტება შემდეგი გზით:

$$L_n := \|D_n\|_1 .$$

ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის მნიშვნელოვანია, რომ აღინიშნოს ფეიერისა და სეგოს [134] შედეგები, სადაც შეფასებულია ლებეგის კონსტანტები. ლებეგის კონსტანტის თვისებები უოლში-პალის სისტემისთვის მიიღო ფინმა [32]. მისი ორმხრივი შეფასებები ასევე დამტკიცებულია [111]-ში. ლუკომსკიმ [75]-ში დაამტკიცა ქვედა შეფასება $1/4$ მუდმივით. მალიხინმა, ტელიაკოვსკიმ და ხოლშჩევნიკოვამ [76]-ში (იხ. ასევე ასტაშკინი და სემენოვი [2]) გააუმჯობესეს ზემოთ მოცემული შეფასება და დაამტკიცეს განუზოგადებელი ზედა შეფასება კონსტანტა 1-თვის. ვილენკინის სისტემის მიმართ ლებეგის კონსტანტის ორმხრივი შეფასებები სხვადასხვა განსხვავებული მუდმივებისთვის მოყვანილია [75]-ში,

რომელიც დამტკიცებულია ლუკომსკის მიერ. [21]-ში აღწერილია ახალი და მოკლე დამტკიცებები, რომელიც აუმჯობესებს ზედა შეფასებას და უზრუნველყოფს მსგავსი ქვედა შეფასების სამართლიანობას. კერძოდ, ნებისმიერი $n = \sum_{j=1}^{\infty} n_i M_i$-თვის და m_n-თვის გვაქვს შემდეგი ორმხრივი შეფასება:

$$\frac{1}{4\lambda} v(n) + \frac{1}{\lambda^2} v^*(n) \leq L_n \leq v(n) + v^*(n), \tag{1.3.1}$$

სადაც $\lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n$.

უფრო მეტიც, (დეტალებისთვის იხ. მემიჩი, შიმონი და ტეფნაძე [78])

$$\frac{1}{nM_n} \sum_{k=1}^{M_n-1} v(k) \geq \frac{2}{\lambda^2}, \tag{1.3.2}$$

(1.3.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-თვის, არსებობს აბსოლიტური მუდმივა c ისეთი, რომ

$$\|D_n\|_1 \leq c \log n. \tag{1.3.3}$$

მაგალითისთვის, თუ ავიღებთ $q_{n_k} = M_{2n_k} + M_{2n_k-2} + M_2 + M_0$, მაშინ ჩვენ გვექნება შემდეგი ორმხრივი შეფასება

$$\frac{n_k}{2\lambda} \leq \left\| D_{q_{n_k}} \right\|_1 \leq \lambda n_k, \qquad \lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n. \tag{1.3.4}$$

1.4 ნორლუნდის, T საშუალოებისა და მათი მაქსიმალური ოპერატორების განმარტებები და მაგალითები

დავუშვათ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივების n-ური ნორლუნდის საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად:

$$t_n f := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \tag{1.4.1}$$

სადაც

$$Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k.$$

ცხადია, რომ

$$t_n f(x) = \int_G f(t) A_n(x-t)\, d\mu(t)$$

სადაც

$$A_n := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} D_k$$

ფუნქციებს უწოდებენ ნორლუნდის გულს.

ცნობილია (დეტალებისთვის იხ. მორი [80] და ტეფნაძე [148]) ნორლუნდის საშუალოების რეგულარულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. კერძოდ, დავუშვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით

რიცხვთა მიმდევრობა. ვთქვათ $q_0 > 0$ და

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty,$$

მაშინ (1.4.1) შეჯამებადობა, რომელიც წარმოიქმნილია $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-1}}{Q_n} = 0. \tag{1.4.2}$$

გარდა ამისა, თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი, მაშინ შეჯამებადობის მეთოდი, რომელიც წარმოქმნილია $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$-ით, ყოველთვის არის რეგულარული მაგრამ თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევ-რობა არის არაკლებადი, მაშინ შეჯამებადობის მეთოდი, რომელიც წარმოიქმნილია $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$-ით, ყოველთვის არაა რეგულარული.

ვთქვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. f ფუნქციის n-ური T საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად

$$T_n f := \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n-1} q_k S_k f, \tag{1.4.3}$$

სადც $Q_n := \sum\limits_{k=0}^{n-1} q_k$.
ცხადია, რომ

$$T_n f(x) = \int\limits_{G_m} f(t) F_n(x-t)\, d\mu(t),$$

სადაც $F_n := \frac{1}{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} q_k D_k$-ს უწოდებენ T საშუალოების გულს.

ვიგულისხმოთ, რომ $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობა და $q_0 > 0$. მაშინ (1.4.3) შეჯამებადობის მეთოდი, რომელიც წარმოქმნილია $\{q_k : k \geq 0\}$-ით, რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty.$$

ვთქვათ t_n იყოს ნორლუნდის საშუალოები, რომლებიც წარმოქმნილია $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობით, ისეთი რომ

$$q := \lim_{n\to\infty} q_n > c > 0.$$

მაშინ, თუ მიმდევრობა $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაკლებადი მივიღებთ

$$nq_0 \leq Q_n \leq nq.$$

იმ შემთხვევაში როცა $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი, მაშინ

$$nq \leq Q_n \leq nq_0. \tag{1.4.4}$$

ორივე შემთხვევაში შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\frac{q_{n-1}}{Q_n}=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \text{როცა}\quad n\to\infty. \tag{1.4.5}$$

ერთ–ერთი ყველაზე ცნობილი შეჯამებადობის მეთოდი, რომელიც არის ნორლუნდისა და T საშუალებების მაგალითი, არის ფეიერის საშუალოები, რომელებიც მიიღება როდესაც $\{q_k=1:k\in\mathbb{N}\}$

$$\sigma_n f:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k f.$$

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების (C,α)-საშუალოები (ჩეზაროს საშუალოები) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sigma_n^{\alpha} f:=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k f,$$

სადაც

$$A_0^{\alpha}:=0,\qquad A_n^{\alpha}:=\frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

ცნობილია, რომ (იხ. ზიგმუნდი [186])

$$A_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}, \tag{1.4.6}$$

$$A_n^{\alpha}-A_{n-1}^{\alpha}=A_n^{\alpha-1},\quad A_n^{\alpha}\backsim n^{\alpha}. \tag{1.4.7}$$

ჩვენ ასევე განვიხილავთ "შებრუნებელ"(C,α)-საშუალოებს, რომელიც არის T-საშუალოების კერძო მაგალითი:

$$U_n^{\alpha} f:=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-1}S_k f,\qquad 0<\alpha<1.$$

ვთქვათ V_n^{α} აღნიშნავს T საშუალოს, სადაც $\left\{q_0=0,\ q_k=k^{\alpha-1}:k\in\mathbb{N}_+\right\}$, მაშინ

$$V_n^{\alpha} f:=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n-1}k^{\alpha-1}S_k f,\qquad 0<\alpha<1.$$

n-ური ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალო L_n და რისის ლოგარითმული საშუალო R_n განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} L_n f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{n-k},\\ R_n f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{k}, \end{aligned}$$

სადაც

$$l_n:=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

ნორლუნდის და რისისა ლოგარითმული საშუალოების გულები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} P_n f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_k}{n-k}, \\ Y_n f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_k}{k}. \end{aligned}$$

აქამდე ჩვენ განვიხილეთ ნორლუნდის და T საშუალოები იმ შემთხვევაში, როდესაც მიმდევრობა $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის შემოსაზღვრული, მაგრამ ახლა განვიხილოთ ნორლუნდისა და T საშუალოებს, რომლებიც წარმოქმნილია შემოუსაზღვრელი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით.

ვთქვათ $\alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \beta \in \mathbb{N}_+$ და

$$\log^{(\beta)} x := \overbrace{\log ... \log}^{\beta\text{-ჯერ}} x.$$

თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$\left\{q_0 = 0 \ \text{ და } \ q_k = \log^{(\beta)} k^{\alpha} : k \in \mathbb{N}_+\right\},$$

მაშინ მივიღებთ ნორლუნდის საშუალებების კლასს არაკლებადი კოეფიციენტებით:

$$\kappa_n^{\alpha,\beta} f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}\log^{(\beta)}(n-k)^{\alpha} S_k f.$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $\kappa_n^{\alpha,\beta}$ კორექტულადაა განსაზღვრული ყოველი $n \in \mathbb{N}_+$-სთვის, თუ მათ გადავწერთ როგორც:

$$\kappa_n^{\alpha,\beta} f = \sum_{k=1}^{n}\frac{\log^{(\beta)}(n-k)^{\alpha}}{Q_n} S_k f.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{n}{2}\log^{(\beta)}\frac{n^{\alpha}}{2^{\alpha}} \le Q_n \le n\log^{(\beta)} n^{\alpha}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \frac{q_{n-1}}{Q_n} &\le \frac{c\log^{(\beta)}(n-1)^{\alpha}}{n\log^{(\beta)} n^{\alpha}} \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \ \text{ როცა } \ n \to \infty. \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$\left\{q_0 = 0, \ q_k = \log^{(\beta)} k^{\alpha} : k \in \mathbb{N}_+\right\},$$

მაშინ მივიღებთ T საშუალოების კლასს არაკლებადი კოეფიციენტებით:

$$B_n^{\alpha,\beta} f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n-1}\log^{(\beta)} k^{\alpha} S_k f.$$

შევნიშნოთ, რომ $B_n^{\alpha,\beta}$ კორექტულადაა განსაზღვრული ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის

$$B_n^{\alpha,\beta} f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log^{(\beta)} k^{\alpha}}{Q_n} S_k f.$$

ცხადია, რომ $\frac{n}{2} \log^{(\beta)} \frac{n^{\alpha}}{2^{\alpha}} \leq Q_n \leq n \log^{(\beta)} n^{\alpha} \to 0,$ როცა $n \to \infty.$

განვსაზღვროთ ნორლუნდისა და T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები შემდეგნაირად:

$$t^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n f|,$$
$$T^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f|$$

ნორლუნდის და T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების ცნობილ მაგალითებს წარმოადგენენ ჩეზაროს საშუალოების, ნორლუნდის და რისის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha,*} f &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n^{\alpha} f|, \\ L^* f &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n f|, \\ R^* f &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} |R_n f|. \end{aligned}$$

ჩვენ ასევე განვსაზღვრავთ რამდენიმე ახალ მაქსიმალურ ოპერატორს:

$$\begin{aligned} \kappa^{\alpha,\beta,*} f &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\kappa_n^{\alpha,\beta} f\right|, \\ \beta^{\alpha,*} f &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n^{\alpha} f|. \end{aligned}$$

1.5 სუსტი ტიპის და ძლიერი ტიპის უტოლობები და თ.ყ. კრებადობა

ორი $f, g \in L_1(G_m)$ ფუნქციის კონვოლუცია (ნახვევი) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$(f * g)(x) := \int_{G_m} f(x-t) g(t)\, dt \quad (x \in G_m).$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$(f * g)(x) = \int_{G_m} f(t) g(x-t)\, dt \quad (x \in G_m).$$

ცნობილია, რომ თუ $f \in L_p(G_m)$, $g \in L_1(G_m)$ და $1 \leq p < \infty$, მაშინ $f * g \in L_p(G_m)$ და

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1. \tag{1.5.1}$$

ფურიეს კლასიკურ ანალიზში $x \in (-\infty, \infty)$ წერტილს ეწოდება f ინტეგრებადი ფუნქციის ლებეგის წერტილი თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, d\mu(t) = 0.$$

$x \in G_m$ წერტილს ეწოდება $f \in L_1(G_m)$-ის ლებეგის წერტილი, თუ

$$\lim_{n\to\infty} M_n \int_{I_n(x)} f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{თ.ყ. } x \in G_m.$$

ცნობილია, რომ თუ $f \in L_1(G_m)$ მაშინ თ.ყ. წერტილი არის ლებეგის წერტილი და

$$\lim_{n\to\infty} S_{M_n} f(x) = f(x), \quad \text{ყველა ლებეგის წერტილში } G_m\text{-ზე}, \tag{1.5.2}$$

სადაც S_{M_n} არის ვილენკინის სისტემის M_n-ური კერძო ჯამი.

ახლა განვსაზღვროთ შემდეგი ოპერატორი

$$W_A f(x) := \sum_{s=0}^{A-1} M_s \sum_{r_s=1}^{m_s-1} \int_{I_A(x-r_s e_s)} |f(t) - f(x)|\, d\mu(t)$$

ვიტყვით, რომ $x \in G_m$ წერტილი არის $f \in L_1(G_m)$ ფუნქციის ვილენკინ-ლებეგის წერტილი, თუ

$$\lim_{A\to\infty} W_A f(x) = 0.$$

ხშირ შემთხვევაში $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ ოპერატორების თ.ყ. კრებადობა მარტივად შეიძლება დადგინდეს $L_1(G_m)$ სივრცის ზოგიერთ ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე, რაც ამარტივებს ამ ოპერატორების თ.ყ. კრებადობის საკითხების შესწავლას ნებისმიერი $f \in L_1(G_m)$-თვის. კერძოდ, შემდეგი ლემა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ამ ტიპის საკითხების შესასწავლად (დეტალებისთვის იხ. წიგნები [61], [111] და [186]).

ლემა 1.1. *დავუშვათ $f \in L_1$ და $T_n : L_1 \to L_1$-ები არიან სუბ-წრფივი ოპერატორები და*

$$T^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n|.$$

თუ

$$T_n f \to f \quad \text{ თ.ყ. ყოველი } \; f \in S$$

სადაც S სიმრავლე არის ყველგან მკვრივი L_1 სივრცეში და მაქსიმალური ოპერატორი T^* შემოსაზღვრულია L_1 სივრციდან სუსტ-L_1 სივრცეში

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\mu\left\{x \in G_m : \; |T^* f(x)| > \lambda\right\} \le \|f\|_1,$$

მაშინ

$$T_n f \to f, \quad \text{ თ.ყ. ყოველი } \; f \in L_1(G_m).$$

შენიშვნა 1.2. *ვინაიდან, ვილენკინის ψ_m ფუნქცია არის მუდმივი $I_n(x)$-ზე ყოველი $x \in G_m$-სთვის და $0 \le m < M_n$-სთვის ცხადია, რომ ვილენკინის თითოეული ფუნქცია არის კომპლექსური ცვლადის*

საფეხურა ფუნქცია. ანუ, ის არის სასრული წრფივი მახასიათებელი ფუნქციების

$$\chi(E)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

წრფივი კომბინაცია. მეორეს მხრივ შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x,t\in G_m$-თვის და $n\in\mathbb{N}$-თვის, (1.2.4)-დან მიიღება

$$\chi\left(I_n(t)\right)(x)=\frac{1}{M_n}\sum_{j=0}^{M_n-1}\psi_j\left(x-t\right),\quad x\in I_n(t),$$

ამრიგად, თითოეული საფეხურა ფუნქცია არის ვილენკინის ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. შესაბამისად, აქედან კი ვიღებთ, რომ საფეხურა ფუნქციების ერთობლიობა ემთხვევა ვილენკინის $\mathcal{P}$ პოლინომების ერთობლიობას. ამიტომ, ნებისმიერი $f\in L_1$-სთვის არსებობს ვილენკინის პოლინომები $P_1,P_2...$, ისეთი, რომ $P_n\to f$ თ.ყ. როცა $n\to\infty$. რაც ნიშნავს, რომ ვილენკინის პოლინომები მკვრივია L_1 სივრცეში.

1.6 უოლშის ფუნქციები ორობით ჯგუფზე და $[0,1)$-ზე

Q_2^*-ით ავღნიშნოთ $p2^{-n}$ სახის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $0\le p\le 2^n-1$, $p\in\mathbb{N}$-თვის და $n\in\mathbb{N}$-თვის.

ნებისმიერი $x\in[0,1]$ შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}x_k2^{-(k+1)},\tag{1.6.1}$$

სადაც თითოეული $x_k=0$ ან 1. თითოეული $x\in[0,1]\setminus Q_2^*$-თვის არსებობს ასეთი ფორმის მხოლოდ ერთი წარმოდგენა. ჩვენ მას ვუწოდებთ x-ის ორობით გაშლას. როცა $x\in Q_2^*$ არსებობს მისი ორნაირი (1.6.1) ტიპის წარმოდგენა. ერთი, რომელიც მთავრდება 0–ით და მეორე, რომელიც მთავრდება 1–ით. შევთანხმდეთ რომ $x\in Q_2^*$-თვის ავიღოთ ის ორობითი წარმოდგენა, რომელიც მთავრდება 0-ით.

თუ $m_k=2$ ყოველი $k\in\mathbb{N}$-სთვის ჩვენ გვაქვს ორობითი ჯგუფი

$$G_2=\prod_{j=0}^{\infty}Z_2,$$

რომელსაც უწოდებენ უოლშის ჯგუფს.

ამ შემთხვევაში რადემახერის ფუნქცია განიმარტება შემდეგი გზით:

$$r_k(x):=(-1)^{x_k},\ \ x\in G_2,\ \ k\in\mathbb{N}.\tag{1.6.2}$$

ახლა, ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ უოლშის სისტემა $w:=(\psi_n:n\in\mathbb{N})$ G_2-ზე შემდეგნაირად:

$$w_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}r_k^{n_k}\left(x\right),\ \ (n\in\mathbb{N}).\tag{1.6.3}$$

ვთქვათ

$$G_0^* := \{x \in G_2 : x = y^* \text{ ზოგიერთი } y \in G_0\}.$$

სადაც $G_0 := \{x \in G : x_n \to 0, \text{როცა } n \to \infty\}$ შეუღლებული ელემენტი x^* G-ში ისეთი რომ $|x| = |x^*|$. თითოეული $x := (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 1, 1, \dots)$ $x_k = 1$ ზოგიერთი $k \in \mathbb{N}$ განვმარტოთ

$$x^* := (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots).$$

ასევე განვსაზღვროთ $0^* := (1, 1, \dots)$. ცხადია, რომ $|x| = |x^*|$ ნებისმიერი $x \in G_0 \setminus \{0\}$. ადვილი სანახავია, რომ თუ $|x| = |y|$ მაშინ $x = y$ ან $x \in G_0$ და $x = y^*$.

განვმარტოთ ფინის ასახვა $\varrho : [0, 1] \to G_2$ შემდეგნაირად

$$\varrho(x) := (x_0, x_1, \dots) \tag{1.6.4}$$

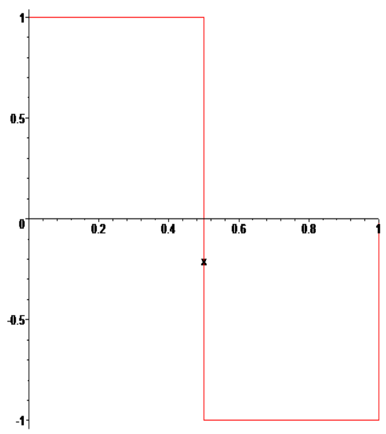
სადაც x-ს აქვს (1.6.1) ორობითი წარმოდგენა.

როგორც ცნობილია (დეტალებისთვის იხ. [111]), რომ მახასიათებელ ფუნქციათა სისტემა $\hat{G_2}$ კანონიკური იზომორფიზმით გადადის უოლშის w სისტემაში. მართლაც თუ $x \in [0, 1)$ აქვს ორობითი (1.6.1) გაშლა, მაშინ რადემახერის ფუნქციების განმარტება შეიძლება ჩავწეროთ, როგრც

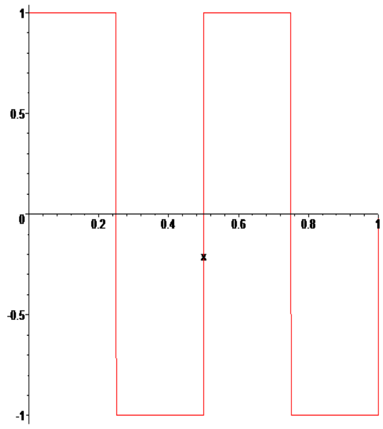
$$\upsilon_n(x) = (-1)^{x_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ამის შედარებით (1.6.2)-თან, დავინახავთ, რომ $\upsilon_n = \tau_n \circ \varrho$ $[0, 1)$ და $\tau_n(x) = \upsilon_n(|x|)$ $x \in G_2 \setminus G_0^*$-თვის და ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის.

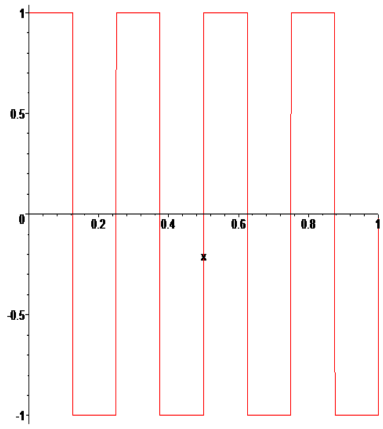
ახლა ავაგოთ რადემახერის ფუნქციების გრაფიკები $[0, 1)$-ზე:



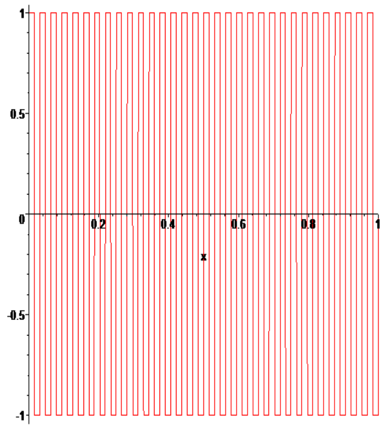
ნახ:2.1 რადემახერის ფუნქცია υ_0



ნახ:2.2 რადემახერის ფუნქცია υ_1



ნახ:2.3 რადემახერის ფუნქცია υ_2



ნახ:2.4 რადემახერის ფუნქცია $\upsilon_1 6$

$[0,1)$-ზე განვმარტოთ უოლშის ფუნქციები, როგორც

$$\phi_n := \prod_{k=0}^{\infty} \upsilon_k^{n_k} = \upsilon_{|n|}(x)(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.6.5}$$

თუ გავითვალისწინებთ G_2-ზე უოლშის ფუნქციების (1.6.5) განმარტებას, (1.6.3)-დან ყოველი $n \in \mathbb{N}$-

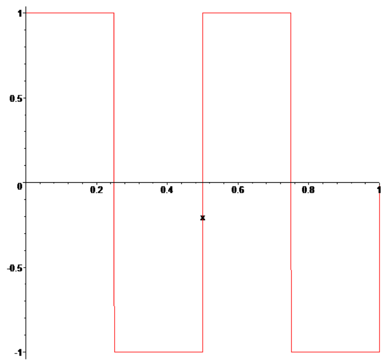
სთვის მივიღებთ

$$\phi_n = w_n \circ \varrho$$

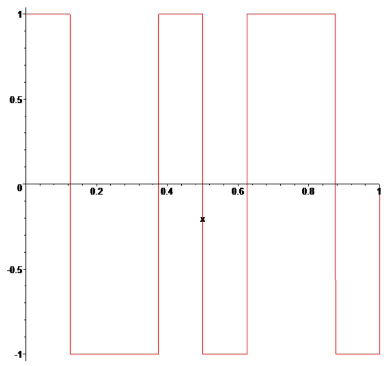
და

$$w_n(x) = \phi_n(|x|) \qquad (x \in G_2 \setminus G_0^*).$$

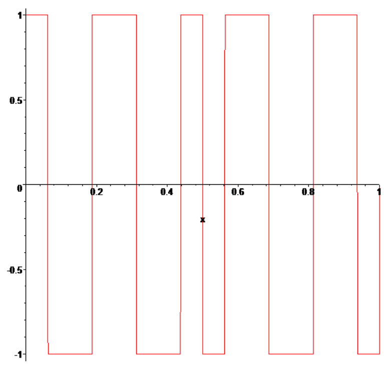
ახლა ავაგოთ უოლშის ფუნქციების გრაფიკები $[0, 1)$-ზე:



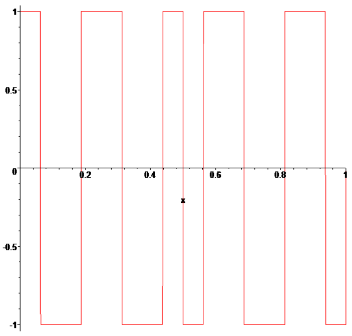
ნახ:2.5 უოლშის ფუნქცია ϕ_2



ნახ:2.6 უოლშის ფუნქცია ϕ_7



ნახ:2.7 უოლშის ფუნქცია ϕ_{13}



ნახ:2.8 უოლშის ფუნქცია ϕ_{53}

ფინის ასახვა შეიძლება გამოყენებულ იქნას $[0,1)$-ზე ახალი შეკრებისა და მანძილის განსამარტად, რომლებიც მჭიდრო კავშირშია G_2–ზე არსებულ შეკრებასა და მანძილთან. მართლაც, ორი $x, y \in [0,1)$ რიცხვისთვის განვმარტოთ ორობითი მანძილი შემდეგნაირად

$$x \dot{+} y = |\varrho(x) + \varrho(y)|.$$

x და y-ის ორობითი დაშლის გამოყენებით ამ ორ წერტილს შორის მანძილი გამოითვლება როგორც

$$x \dot{+} y = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k| \, 2^{-k-1}.$$

აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ $\dot{+}$ არის კომუტაციური ბინარული ოპერაცია $[0,1)$-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს $x \dot{+} x = 0$-ს.

$[0,1)$-ზე, რომელზეც შეკრება განმარტებულია $\dot{+}$-ით, G_2-დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიას ეწოდება ორობითი ტოპოლოგია. შევნიშნოთ რომ $[0,1)$ არ არის ჯგუფი $\dot{+}$ ოპერაციის მიმართ.

ორობითი ჯამის გათვალისწინებით უოლშის ფუნქციები $[0,1)$-ზე თითქმის ყველგან იქცევიან ისე, როგორც მახასიათებელი ფუნქციები. კერძოდ,

$$\phi_n(x \dot{+} y) = \phi_n(x)\phi_n(y) \qquad (n \in \mathbb{N}, \ \ x, y \in [0,1), x \dot{+} y \notin Q_2^*). \tag{1.6.6}$$

ორობითი ინტერვალს $[0,1)$-ში ჩვენ ვუწოდებთ შემდეგი სახის ინტერვალებს

$$I(p,n) := \big[p2^{-n}, (p+1)2^{-n},\big) \qquad (0 \le p < 2^n, n, p, \in \mathbb{N}). \tag{1.6.7}$$

ცხადია, ორობითი ტოპოლოგია წარმოიქმნება ორობითი ინტერვალების ერთობლიობით. უფრო მეტიც, ყოველი ორობითი ინტერვალი არის ღია და ჩაკეტილი ორობით ტოპოლოგიაში. აქედან გამომდინარეობს, რომ უოლშის თითოეული ფუნქცია უწყვეტია ორობით ტოპოლოგიაში. ამრიგად, ორობითი ტოპოლოგია არსებითად განსხვავდება ჩვეულებრივ ტოპოლოგიისგან.

თითოეული $x \in [0,1)$-სთვის და $n \in \mathbb{N}$-სთვის $I_n(x)$-ით აღვნიშნოთ ორობითი ინტერვალი რომლის სიგრძე არის 2^{-n}. ამრიგად

$$I_n(x) := I(p,n)$$

სადაც $0 \leq p < 2^n$ ცალსახადაა განსაზღვრული $x \in I(p,n)$-ით. ეს არის იგივე აღნიშვნა, რომელიც გამოიყენება ჯგუფში ორობითი ინტერვალებისთვის, მაგრამ არ წარმოქმნის პრობლემებს, რადგან კონტექსტში გაირკვევა ორობითი ინტერვალი ჯგუფშია თუ ერთეულის ინტერვალის შიგნით.

$I:[0,1)\to\mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია ორობითი ტოპოლოგიიდან ჩვეულებრივ ტოპოლოგიაში უწოდებენ $W-$ *უწყვეტს*-ს. შემდეგი უტოლობის გამოყენებით

$$|x-y|\leq x\dotplus y \quad (x,y\in[0,1)),$$

ცხადია, რომ $[0,1)$-ზე ყოველი კლასიკური აზრით უწყვეტი ფუნქცია არის $W-$ *უწყვეტიც*. სინამდვილეში, ყოველი ფუნქცია C_w-ში არის თანაბრად $W-$ *უწყვეტი* ერთეულ ინტერვალზე. მეორეს მხრივ, ყველა $W-$ *უწყვეტი* ფუნქცია არ ეკუთვნის C_w-ს.

ვთქვათ L^0 წარმოდგენს თ.ყ. სასრული ლებეგის აზრით ზომად ფუნქციების ერთობლიობას $[0,1)$-დან $[-\infty,\infty]$-ში. ვთქვათ $0<p<\infty$-თვის L^p წარმოდგენს $f\in L^0$-ის ერთობლიობას ისეთს, რომ

$$\|f\|_p:=\left(\int_0^1|f|^p\right)^{1/p}$$

არის სასრული.

L^∞ წარმოდგენს $f\in L^0$ ფუნქციების ისეთ ერთობლიობას, რომელთათვისაც

$$\|f\|_\infty:=\inf\{y\in\mathbb{R}:|f(x)|\leq y \quad \text{თ.ყ.} \quad x\in[0,1)\}.$$

ცნობილია, რომ L^p არის ბანახის სივრცე თითოეული $1\leq p\leq\infty$-სთვის.

თუ $f\in L_1(E)$, სადაც $E=G_2$ ან $[0,1)$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ფურიეს კოეფიციენტები, ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები, ფეიერის საშუალოები, დირიხლესა და ფეიერის გულები w უოლშის სისტემებისათვის შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}^{\alpha}(k) &:= \int_E f\overline{\alpha}_k d\mu, \qquad (\alpha_k=w_k \text{ ან } \phi_k), \qquad (k\in\mathbb{N}),\\
S_n^{\alpha}f &:= \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)\,\alpha_k, \qquad (\alpha_k=w_k \text{ ან } \phi_k), \qquad (n\in\mathbb{N}_+,\ S_0^{\alpha}f:=0),\\
D_n^{\alpha} &:= \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k, \qquad (\alpha=w \text{ ან } \phi), \qquad (n\in\mathbb{N}_+),
\end{aligned}$$

$[0,1)$ სიმრავლეზე მოცემული უოლშის სისტემისთვის მოვიყვანოთ დირიხლეს გულის ცნობილი ტოლობები (დეტალებისთვის იხ. [61] და [111]):

$$D_{2^n}^{w}(x)=\begin{cases}2^n, & \text{თუ } x\in I_n\\ 0, & \text{თუ } x\notin I_n\end{cases} \tag{1.6.8}$$

და

$$D_n^w = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k D_{2^k}^w = w_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(D_{2^{k+1}}^w - D_{2^k}^w \right), \quad \text{სადაც} \quad n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i, \tag{1.6.9}$$

$[0,1)$ ინტერვალზე ავაგოთ დირიხლეს გულის გრაფიკები:

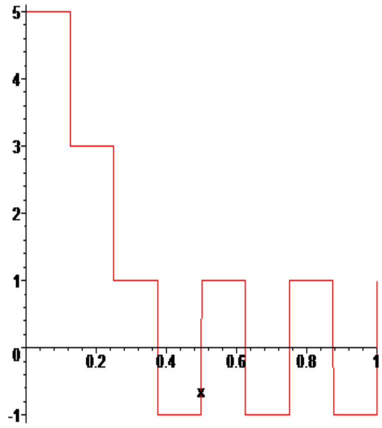


Fig:2.9 დირიხლეს გული D_5^{ϕ}

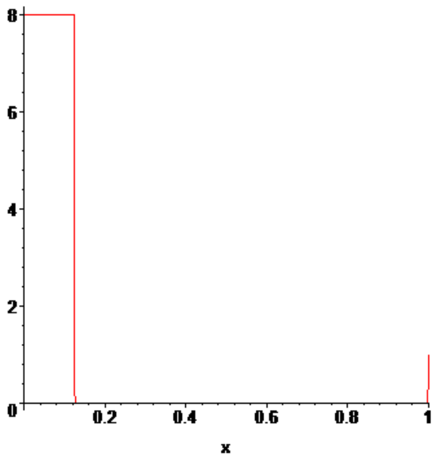


Fig:2.10 დირიხლეს გული D_8^{ϕ}

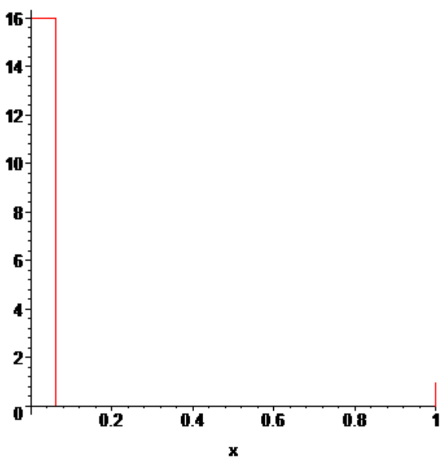


Fig:2.12 დირიხლეს გული D_{16}^{ϕ}

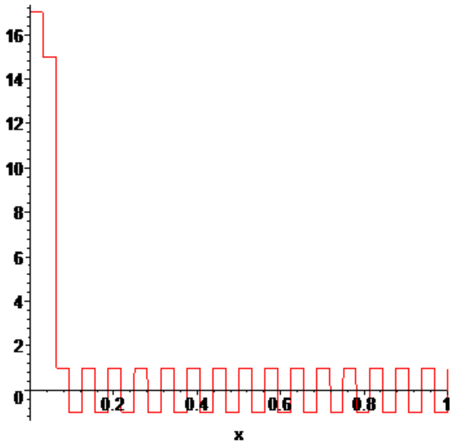


Fig:2.11 დირიხლეს გული D_{17}^{ϕ}

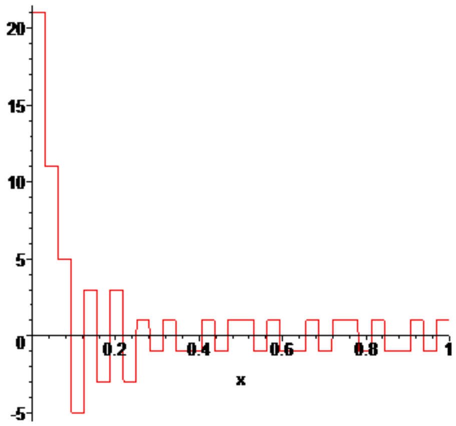


Fig:2.13 დირიხლეს გული D_{21}^{ϕ}

ლებეგის მუდმივების თვისებები უოლშ-პალის სისტემისათვის მიიღო ფაინმა [32]-ში. [111]-ში, დამტკიცებულია შემდეგი ორმხრივი შეფასება

$$\frac{V(n)}{8} \leq L_n \leq V(n)$$

სადაც $n = \sum_{j=1}^{\infty} n_j 2^j$ და $V(n)$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$V(n) := \sum_{j=1}^{\infty} |n_{j+1} - n_j| + n_0.$$

თუ $f \in L_1(E)$, სადაც $E = G_2$ ან $[0,1)$, მაშინ ფეიერის საშუალო და ფეიერის გული უოლშის ψ (უოლშის სისტემა w) სისტემის მიმრთ შემდეგნაირადაა განმარტებული:

$$\sigma_n^{\alpha} f \quad : \quad = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k^{\alpha} f, \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+),$$

$$K_n^{\alpha} \quad : \quad = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k^{\alpha}, \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+).$$

n-ური L_n^α ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალო და რისის R_n^α ლოგარითმული საშუალო უოლშის ψ (უოლშის სისტემა w) სისტემის მიმართ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} L_n^\alpha f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{n-k}, \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \\ R_n^\alpha f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{k}, \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \end{aligned}$$

სადაც

$$l_n := \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

ნორლუნდის ლოგარითმული P_n^α საშუალოს და რისის ლოგარითმული Y_n^α საშუალოების გულები განისაზღვრება შესაბამისად:

$$\begin{aligned} P_n^\alpha f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_k^\alpha f}{n-k}, \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+), \\ Y_n^\alpha f &:= \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_k^\alpha f}{k} \qquad (\alpha = w \text{ ან } \phi), \qquad (n \in \mathbb{N}_+). \end{aligned}$$

1.7 ჰარდის მარტინგალური სივრცეების თეორია როცა $0 < p \leq 1$

σ-ალგებრა რომელიც წარმოქმნილია

$$\{I_n(x) : x \in G_m\}$$

ინტერვალით აღვნიშნოთ F_n $(n \in \mathbb{N})$-ით.

ვიტყვით, რომ $f^{(n)}$ ინტეგრებადი ფუნქციების $f = \left(f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ მიმდევრობა არის მარტინგალი σ-ალგებრა F_n $(n \in \mathbb{N})$-ის მიმართ, თუ (იხ. ვეისი [171])

1) $f^{(n)}$ არის F_n ზომადი ყოველი $n \in \mathbb{N}$-*სთვის,*

2) $S_{M_n} f_m = f^{(n)}$ ყოველი $n \leq m$-*სთვის.*

ვიტყვით, რომ მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ არის L_p-შემოსაზღვრული $(0 < p \leq \infty)$ თუ $f^{(n)} \in L_p$ და

$$\|f\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|f^{(n)}\right\|_p < \infty.$$

თუ $f \in L_1(G_m)$, მაშინ ადვილი სანახავია, რომ $F = (S_{M_n} f : n \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა არის მარტინგალი. ასეთი ტიპის მარტინგალს უწოდებენ რეგულარულს. თუ $1 \leq p \leq \infty$ და $f \in L_p(G_m)$ მაშინ $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ არის L_p-შემოსაზღვრული და

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{M_n} f - f\|_p = 0$$

შესაბამისად $\|F\|_p = \|f\|_p$ (იხ. [91]). ასევე ცნობილია, რომ თუ $1 < p \leq \infty$ (იხ [91]) ნებისმიერი

L_p-შემოსაზღვრული $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ მარტინგალისთვის მაშინ არსებობს $f \in L_p\left(G_m\right)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $f^{(n)} = S_{M_n} f$. თუ $p = 1$, მაშინ არსებობს ასეთივე $f \in L_1\left(G_m\right)$ ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $f^{(n)}$ მარტინგალი არის თანაბრად ინტეგრებადი (იხ. [91]), კერძოდ, თუ

$$\lim_{y \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_n| > y\}} |f_n(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

ამრიგად, ასახვა $f \to f := (E_n f : n \in \mathbb{N})$ არის იზომეტრიული L_p სივრციდან L_p-შემოსაზღვრულ მარტინგალების სივრცეში როცა $1 < p \leq \infty$. შესაბამისად შეიძლება, რომ ეს ორი სივრცე ერთმანეთთან გავაიგივოთ. ანალოგიურად, $L_1\left(G_m\right)$ სივრცე შეიძლება გავაიგივოთ თანაბრად ინტეგრებად მარტინგალურ სივრცეებთან.

ანალოგიურად, მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ არის *სუსტი* $- L_p$-შემოსაზღვრული $(0 < p \leq \infty)$ თუ $f^{(n)} \in \text{weak} - L_p$ და

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|f^{(n)}\right\|_{weak-L_p} < \infty.$$

მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია f^* განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|f^{(n)}\right|.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f \in L_1(G_m)$, მაქსიმალური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი გზით:

$$f^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|I_n(x)|} \left| \int_{I_n(x)} f(u)\, d\mu(u) \right|.$$

$0 < p < \infty$-სთვის ჰარდის მარტინგალური სივრცე H_p მოიცავს ყველა მარტინგალს რომლისთვისაც

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

$f = \left(f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right)$ მარტინგალის ვილენკინ-ფურიეს კოეფიციენტი განიმარტება ოდნავ განსხვავებული ფორმით:

$$\widehat{f}(i) := \lim_{k \to \infty} \int_{G_m} f^{(k)} \overline{\psi}_i d\mu.$$

კლასიკური ჰარდი სივრცის და ნამდვილი ჰარდის სივრცის განმარტებები და ამ სივრცეების ატომების დაშლის თეორემები შეგვიძლია ვნახოთ ფეფერმანსა და სტეინში [30] (ასევე იხ. ლეიტერი [73], ტორჩინსკი [158], ვილსონი [178]).

შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია a არის p-ატომი, თუ არსებობს I ინტერვალი, ისეთი რომ

$$\int_I a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \leq \mu(I)^{-1/p}, \quad \text{supp}(a) \subset I.$$

p-ატომის კონკრეტული კონსტრუქციები შეგვიძლია ვნახოთ [23] და [24] შრომებში.

შევნიშნოთ, რომ ჰარდის მარტინგალურ $H_p\left(G_m\right)$ სივრცეებთვისაც სამართლიანია ატომების დაშლის თეორემები, როცა $0 < p \leq 1$.

შემდეგი ლემა დამტკიცებულია ვეისის მიერ [171, 173]-ში.

ლემა 1.3. *$f=\left(f^{(n)}:n\in\mathbb{N}\right)$ მარტინგალი არის $H_p\,(0<p\leq 1)$-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს p-ატომის $(a_k,k\in\mathbb{N})$ მიმდევრობა და ნამდვილი რიცხვების $(\mu_k:k\in\mathbb{N})$ მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი $n\in\mathbb{N}$-სთვის*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{M_n}a_k=f^{(n)},\quad \text{თ.ყ.},\tag{1.7.1}$$

სადაც

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p<\infty.$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p}\backsim\inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mu_k\right|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აიღება $f=\left(f^{(n)}:n\in\mathbb{N}\right)$-ის ყველა წარმოდგენას შორის, რომელსაც აქვს (1.7.1) სახე.

ასევე H_p მარტინგალების კონსტრუქცია შეგვიძლია ვნახოთ შემდეგ შრომებში: [5], [106], [135], [156], [154], [155], [149], [136], [152], [157] და [109].

ატომებად დაშლის თეორემის გამოყენებით მარტივად მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი ლემები (იხ. ვეისი [173].):

ლემა 1.4. *დავუშვათ, რომ T ოპერატორი არის სუბ-წრფივი და $0<p_0\leq 1$-სთვის სრულდება*

$$\int\limits_{\overline{I}}\left|Ta\right|^{p_0}d\mu\leq c_p<\infty,$$

ყოველი p_0-ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს ატომის სუპორტს. თუ T ოპერატორი არის შემოსაზღვრული L_{p_1}-დან L_{p_1}-ში, $(1<p_1\leq\infty)$ მაშინ

$$\|Tf\|_{p_0}\leq c_{p_0}\|f\|_{H_{p_0}}.\tag{1.7.2}$$

უფრო მეტიც, თუ $p_0<1$, მაშინ ყოველი $f\in L_1$-თვის გვაქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობა

$$\lambda\mu\left\{x\in G_m:\ \left|Tf\left(x\right)\right|>\lambda\right\}\leq\|f\|_1.$$

ასევე მტკიცდება შემდეგი ლემის სამართლიანობა:

ლემა 1.5. *დავუშვათ, რომ T ოპერატორი არის სუბ-წრფივი და $0<p_0\leq 1$-სთვის სრულდება*

$$\sup_{\lambda>0}\lambda^{p_0}\mu\left\{x\in\overline{I}:\left|Tf\right|>\lambda\right\}\leq c_{p_0}<+\infty$$

ყოველი p_0-ატომისთვის a, სადაც I ნიშნავს ატომის სუპორტს. თუ T ოპერატორი არის შემოსაზღვრული L_{p_1}-დან L_{p_1}-ში $(1<p_1\leq\infty)$, მაშინ

$$\|Tf\|_{weak-L_{p_0}}\leq c_{p_0}\|f\|_{H_{p_0}}.$$

უფრო მეტიც, თუ $p_0 < 1$, მაშინ

$$\lambda\mu\left\{x \in G_m : \ |Tf(x)| > \lambda\right\} \leq \|f\|_1 ,$$

ყოველი $f \in L_1$-თვის.

ჰარდის მარტინგალურ H_p $(p > 0)$ სივრცეში უწყვეტობის მოდული განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_n}, f\right) := \|f - S_{M_n}f\|_{H_p} .$$

ჩვენ უნდა გვესმოდეს, თუ რას ვგულისხმობთ $f - S_{M_n}f$ გამოსახულების ქვეშ, სადაც f არის მარტინგალი და $S_{M_n}f$ არის ფუნქცია:

შენიშვნა 1.6. *ვთქვათ $0 < p \leq 1$. მას შემდეგ, რაც*

$$S_{M_n}f = f^{(n)}, f = \left(f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right) \in H_p$$

და

$$\begin{aligned}\left(S_{M_k}f^{(n)} : k \in \mathbb{N}\right) &= \left(S_{M_k}S_{M_n}f, k \in \mathbb{N}\right)\\ &= \left(S_{M_0}f, \ldots, S_{M_{n-1}}f, S_{M_n}f, S_{M_n}f, \ldots\right)\\ &= \left(f^{(0)}, \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}, f^{(n)}, \ldots\right)\end{aligned}$$

მივიღებთ, რომ

$$f - S_{M_n}f = \left(f^{(k)} - S_{M_k}f : k \in \mathbb{N}\right)$$

არის მარტინგალი, რომლისთვისაც

$$(f - S_{M_n}f)^{(k)} = \begin{cases} 0, & k = 0, \ldots, n, \\ f^{(k)} - f^{(n)}, & k \geq n+1, \end{cases} \tag{1.7.3}$$

ვატარიმ [166] აჩვენა, რომ არსებობს ძლიერი კავშირი

$$\omega_p\left(\frac{1}{M_n}, f\right)\text{-ს}, \quad E_{M_n}\left(L_p, f\right)\text{-სა} \quad \text{და} \quad \|f - S_{M_n}f\|_p\text{-ს შორის, სადაც } \ p \geq 1, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

კერძოდ,

$$\frac{1}{2}\omega_p\left(\frac{1}{M_n}, f\right) \leq \|f - S_{M_n}f\|_p \leq \omega_p\left(\frac{1}{M_n}, f\right) \tag{1.7.4}$$

და

$$\frac{1}{2}\|f - S_{M_n}f\|_p \leq E_{M_n}\left(L_p, f\right) \leq \|f - S_{M_n}f\|_p .$$

შემდეგი ლემა იძლევა იმის პასუხს, თუ რა ხდება, როცა $p > 1$. ამ ლემის დამტკიცება შეგვიძლია ვნახოთ [91]-ში (იხ. ასევე [172]).

ლემა 1.7. *ვთქვათ* $p>1$. *მაშინ*

$$H_p \sim L_p.$$

ამ შენიშვნის და (1.7.4)-ის გამოყენებით მივიღებთ

შენიშვნა 1.8. *ვთქვათ* $p>1$. *მაშინ*

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_n}, f\right) \sim \omega_p\left(\frac{1}{M_n}, f\right).$$

შემდეგი ლემა 1.9-ის დამტკიცება შეგვიძლია ვნახოთ [173]-ში (იხ. აგრეთვე წიგნი [111]).

ლემა 1.9. *თუ* $f \in L_1$, *მაშინ* $F := (S_{M_n}f : n \in \mathbb{N})$ *მიმდევრობა არის მარტინგალი და*

$$\|F\|_{H_p} \sim \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_{M_n}f|\right\|_p.$$

უფრო მეტიც, თუ $F := (S_{M_n}f : n \in \mathbb{N})$ *არის მარტინგალი რომელიც წარმოქმნილია* $f \in L_1$*-ით, მაშინ*

$$\widehat{F}(k) = \int_{G_m} f(x)\,\psi_k(x)\,d\mu(x) = \widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

2 კერძო ჯამები და ფეიერის საშუალოები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივებისთვის ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში

2.1 კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების ზოგიერთი კლასიკური შედეგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივებისთვის

რიმან-ლებეგის ლემის (იხ. წიგნი [111]) თანახმად $\widehat{f}(k) \to 0$, როცა $k \to \infty$, თითოეული $f \in L_1$-სთვის.

ცნობილია, რომ (იხ. [4] და [111]) თუ $f \in L_1$ და ვილენკინის მწკრივი $T(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j \psi_j(x)$ ნორმით კრებადია f-კენ L_1 ნორმით, მაშინ $c_j = \int_{G_m} f \overline{\psi}_j d\mu := \widehat{f}(j)$. ე.ი. ამ შემთხვევაში მწკრივი, რომელიც f-ის აპროქსიმაცია აკეთებს აუცილებლად ვილენკინ-ფურიეს მწკრივია. ანალოგიური შედეგი სამართლიანია მაშინაც, თუ ვილენკინის მწკრივი თანაბრად კრებადია G_m-ზე ინტეგრებადი f ფუნქციისკენ.

ლებეგის მუდმივის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ, რომ $S_{n_k} f$ ნორმით კრებადია f-კენ L_1-ში, ნებისმიერი ინტეგრებადი f ფუნქციისთვის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\sup_k L_{n_k} \leq c < \infty$. არსებობს სხვადასხვა შედეგი როცა $p > 1$.

ასევე ცნობილია, რომ (იხ. წიგნი [111])

$$\|S_n f\|_p \leq c_p \|f\|_p, \ \text{ როცა } \ p > 1,$$

მაგრამ შეიძლება დამტკიცდეს უფრო ძლიერი შედეგიც (იხ. წიგნი [111]):

$$\|S^* f\|_p \leq c_p \|f\|_p, \ \text{ როცა } \ f \in L_p, \ \ p > 1.$$

აქედან დავასკვნით, რომ თუ $f \in L_p, \ p > 1$, მაშინ

$$S_{M_n} f(x) \to f(x), \ \ \text{თ.ყ.}$$

ანალოგიურ თეორემებს ადგილი არაა აქვს, როცა $p = 1$-თვის, მაგრამ ამ ვატარიმ [167] (იხ. ასევე გოსელინი [60] და იანგიმ [181]) აჩვენა, რომ არსებობს აბსოლიტური მუდმივი c ისეთი , რომ $n = 1, 2, \ldots$,-სთვის

$$\lambda \mu (|S_n f| > \lambda) \quad \leq \quad c \|f\|_1, \quad f \in L_1(G_m), \ \ \lambda > 0.$$

უფრო მეტიც, როგორც ცნობილია (დეტალებისთვის იხ. [111]) ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციისთვის თ.ყ. წერტილი არის ლებეგის წერტილი და $S_{M_n} f(x) \to f(x)$ ნებისმიერი ლებეგის წერტილისთვის.

ვილენკინის (უოლშის) და ტრიგონომეტრიული სისტემების კერძო ჯამების L_1 ნორმით, თანაბრად და წერტილოვნად კრებადობა და ზოგიერთი აპროქსიმაციული თვისებები შესწავლილია ანტონოვის [1], ავდისპაჰიჩის და მემიჩის [3], ბარამიძის [6], გოგინავას [51, 52], შნეიდერის [112], შოლინის [129], ონევირის და ვატერმენის [94,95] მიერ. ფაინმა [32] მიიღო საკმარისობის პირობები ვილენკი-

ფურიეს მწკრივის ჯერძო ჯამების თანაბარი კრებადობისთვის, რომელიც დინი-ლიპშიცის პირობების სრულიად ანალოგურია. გულისევმა [62] შეაფასა უოლშ-ფურიეს მწკრივების თანაბარი კრებადობის სიჩქარე ლებეგის კონსტანტების და უწყვეტობის მოდულების გამოყენებით. კერძო ჯამების ქვემიმდევრობების თანაბარი კრებადობა ასევე შესწავლილია გოგინავასა და ტყებუჩავას [56], ფრიდლის [33] და გატის [41] მიერ. ორგანზომილებიანი კერძო ჯამების აპროქსიმაციის თვისებები ვილენკინისა და ტრიგონომეტრიულ სისტემებისთვის შეგვიძლია ვნახოთ [111]-ში და [186]-ში.

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების თ.ყ. კრებადობა შეგვიძლია ვნახოთ [100]-ში, ხოლო მისი განშლადობის შესახებ სხვადასხვა შედეგები მიღებულია ბიწაძის [9,12], ბუღაძის [10,11], ფეიერის [31], გოსელინის [60], კაჰანის [65], კაზელსონის [67], კარაგულიანის [68,69], ხელაძის [71,72], ლებეგის [74], სტეჩკინის [121], იუნგის [182–184] და ჟიჟიაშვილის [185] მიერ.

ფურიეს კოეფიციენტების ზოგიერთი შეფასება და აბსოლუტური კრებადობა, ასევე სრული ორთონორმალური სისტემების მიმართ ფურიეს მწკრივების განშლადობა შესწავლილია ბოჩკარიოვის [25], გოგოლაძისა და ცაგარეიშვილის [58,59,92], კაშინის და სააკიანის [70], ონიანის [96], ცაგარეიშვილისა და თუთბერიძის [159] მიერ. ფუნქციის აპროქსიმაცია ლოკალურად კომპაქტურ აბელის ჯგუფებზე შესწავლილია უგულავას [28,29] (იხ. აგრეთვე [26]) მიერ.

მას შემდეგ, რაც $H_1 \subset L_1$, რიმან-ლებეგის თეორემის თანახმად, მიიღება რომ $\widehat{f}(k) \to 0$ როცა $k \to \infty$, ყოველი $f \in H_1$-თვის. ჰარდის ტიპის კლასიკური უტოლობა ფართოდაა ცნობილი როგორც ტრიგონომეტრიული, ასევე ვილენკინის სისტემებისთვის. ეს უტოლობა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის დაამტკიცეს ჰარდიმ და ლიტლვუდიმ [63]-ში (ასევე იხ. წიგნი [27]), ხოლო უოლშის სისტემებისთვის დამტკიცებულია შიპის, ვეიდის, შიმონის და პალის [111] მიერ. ვილენკინ-ფურიეს კოეფიციენტების ზოგიერთი უტოლობა განხილულია შემდეგ შრომებში: [98], [120], [123,128], [140], [169,171,177].

ცნობილია, რომ (მაგ. დეტალებისთვის იხ. წიგნიები [111] და [171]) კერძო ჯამების S_{M_n} ქვემიმდევრობა შემოსაზღვრულია H_p ჰარდის მარტინგალური სივრციდან L_p ლებეგის სივრცეში ყოველი $p > 0$-სთვის. თუმცა, (იხ. ტეფნაძე [143]) არსებობს $f \in H_p$ $(0 < p < 1)$ მარტინგალი, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_{M_n+1}f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

$S_{M_n+1}f$-ის განშლადობის მიზეზი არის ის, რომ $f \in H_p$-ის ფურიეს კოეფიციენტები არ არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულნი (იხ. ტეფნაძე [142]) როცა $0 < p < 1$. მეორეს მხრივ, არსებობს c_p აბსოლუტური მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე ისეთი, რომ

$$\|S_{M_n}f\|_p \le c_p \|f\|_{H_p}, \quad p > 0, \quad n \in \mathbb{N}_+. \tag{2.1.1}$$

ტეფნაძემ [143]-ში (ასევე იხ. [145] და [148]) დაამტკიცა, რომ ყოველი $0 < p < 1$-სთვის მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{S}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}$$

შემოსაზღვრულია ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. უფრო მეტიც მიმდევრობის $(n+1)^{1/p-1}$ რიგი განუზოგადებელია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $0 < p < 1$-სთვის და $f \in H_p$-სთვის არსებობს აბსოლუ-

ტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე, ისეთი რომ

$$\|S_n f\|_p \leq c_p \left(n+1\right)^{1/p-1} \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

ბლახოტამ, ნოჯიმ, პერსონმა და ტეფნაძემ ([14])-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $0 < p \leq 1$ და ზრდადი, დადებითი $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ რიცხვების ქვემიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \rho\left(\alpha_k\right) = \varkappa < \infty, \tag{2.1.2}$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{S}^{*,\vartriangle} f := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|S_{\alpha_k} f\right|$ შემოსაზღვრულია ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. უფრო მეტიც, თუ $0 < p < 1$ და ზრდადი, დადებითი $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ რიცხვების ქვემიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \rho\left(\alpha_k\right) = \infty, \tag{2.1.3}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p, \ (0 < p < 1)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\|S_{\alpha_k} f\right\|_{weak-L_p} = \infty.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $p > 0$-სთვის და $f \in H_p$-სთვის, მაქსიმალური ოპერატორები

$$\widetilde{S}^{*}_{\#} f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|S_{M_n} f\right| \quad \text{და} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \left|S_{M_n + M_{n-1}} f\right| \tag{2.1.4}$$

შემოსაზღვრულები არიან ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. ასევე შევნიშნოთ, რომ თუ $p > 0$ და $f \in H_p$, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_+} \left|S_{M_n + 1} f\right|$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

როგორც ცნობილია (დეტალებისთვის იხ. [148])

$$\left\|S_{M_n} f - f\right\|_{H_p} \to 0, \quad f \in H_p \quad (p > 0). \tag{2.1.5}$$

ტეფნაძემ [143]-ში (ასევე იხ. [145] და [148]) დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $0 < p < 1$-თვის და $f \in H_p$-სთვის არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|S_n f\|_{H_p} \leq c_p n^{1/p-1} \|f\|_{H_p}.$$

ტეფნაძემ [143]-ში დაამტკიცა, რომე ნებისმიერი $0 < p < 1$-სთვის, $f \in H_p$-სთვის და $M_k < n \leq$

M_{k+1}-სთვის არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|S_nf-f\|_{H_p}\leq c_pn^{1/p-1}\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_k},f\right).$$

ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $0<p<1$, $f\in H_p$ და

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_n},f\right)=o\left(\frac{1}{M_n^{1/p-1}}\right),\text{ როცა } n\to\infty,$$

მაშინ

$$\|S_kf-f\|_{H_p}\to 0,\text{ როცა }\quad k\to\infty.$$

უფრო მეტიც, ყოველი $0<p<1$-თვის არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_n},f\right)=O\left(\frac{1}{M_n^{1/p-1}}\right),\quad\text{როცა}\quad n\to\infty$$

და

$$\|S_kf-f\|_{weak-L_p}\nrightarrow 0,\text{ როცა } k\to\infty.$$

ტეფნაძემ [153]-ში დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $0<p<1$-თვის და $f\in H_p$-სთვის არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|S_nf\|_{H_p}\leq\frac{c_pM_{|n|}^{1/p-1}}{M_{\langle n\rangle}^{1/p-1}}\|f\|_{H_p}.$$

უფრო მეტიც, ნებისმიერი $0<p<1$-სთვის და ნებისმიერი არაურყოფითი რიცხვების ზრდადი $\{n_k:\ k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის რომლისთვისაც სამართლიანია (2.1.3) პირობა და $\{\Phi_n:n\in\mathbb{N}\}$ ნებისმიერი არაზრდადი მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{M_{|n_k|}^{1/p-1}}{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-1}\Phi_{n_k}}=\infty,\tag{2.1.6}$$

არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{S_{n_k}f}{\Phi_{n_k}}\right\|_{L_{p,\infty}}=\infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $0<p<1$, $f\in H_p$ და $\{n_k:\ k\in\mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა, მაშინ $\|S_{n_k}f\|_{H_p}\leq c_p\|f\|_{H_p}$ სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ შესრულებულია (2.1.2) პირობა.

[150]-ში (აგრეთვე იხ. [153]) დამტკიცებულია, რომ თუ $0<p<1$, $f\in H_p$ და $M_k<n\leq M_{k+1}$, მაშინ არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|S_nf-f\|_{H_p}\leq\frac{c_pM_{|n|}^{1/p-1}}{M_{\langle n\rangle}^{1/p-1}}\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_k},f\right),\quad(0<p<1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_{|n_k|}}, f\right) = o\left(\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-1}}{M_{|n_k|}^{1/p-1}}\right), \text{ როცა } k \to \infty,$$

მაშინ $\|S_{n_k}f - f\|_{H_p} \to 0$, როცა $k \to \infty$. უფრო მეტიც, თუ $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ სამართლიანია (2.1.3) პირობა, მაშინ არსებობს $f \in H_p$ მარტინგალი და $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_p}\left(\frac{1}{M_{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{M_{\langle \alpha_k\rangle}^{1/p-1}}{M_{|\alpha_k|}^{1/p-1}}\right), \text{ როცა } k \to \infty$$

და $\limsup_{k\to\infty} \|S_{\alpha_k}f - f\|_{weak-L_p} > c > 0$, როცა $k \to \infty$.

ტეფნაძემ [143]-ში (აგრეთვე იხ. [148]) დაამტკიცა, რომ ყოველი $f \in H_1$-სთვის მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{S}^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|S_n f|}{\log(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_1 სივრციდან ლებეგის L_1 სივრცეში. უფრო მეტიც, $\log(n+1)$ მიმდევრობის რიგი არის განუზოგადებელი. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $f \in H_1$-სთვის არსებობს აბსულუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|S_n f\|_1 \le c\log(n+1)\|f\|_{H_1}, \quad n \in \mathbb{N}_+. \tag{2.1.7}$$

ამ შეფასებიდან დაუყოვნებლივ გამომდინარეობს, რომ თუ $f \in H_1$ და $M_k < n \le M_{k+1}$, მაშინ არსებობს აბსულუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|S_n f - f\|_{H_1} \le c\lg n\,\omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_k}, f\right).$$

ამ შეფასების გამოყენებით მივიღებთ, რომ თუ $f \in H_1$ და

$$\omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_n}, f\right) = o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ როცა } n \to \infty,$$

მაშინ $\|S_k f - f\|_{H_1} \to 0$, როცა $k \to \infty$. უფრო მეტიც, (დეტალებისთვის იხ. [143]) არსებობს მარტინგალი $f \in H_1$, რომლისთვისაც

$$\omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_{2M_n}}, f\right) = O\left(\frac{1}{M_n}\right), \quad \text{როცა } n \to \infty$$

და $\|S_k f - f\|_1 \nrightarrow 0$, როცა $k \to \infty$.

[150]-ში (აგრეთვე იხ. [153]) დამტკიცებულია, რომ თუ $f \in H_1$ და $M_k < n \le M_{k+1}$, მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|S_n f\|_{H_1} \le c\left(v(n) + v^*(n)\right)\|f\|_{H_1}.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი და არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს $\lim_{n\to\infty} \Phi_n = \infty$ პირობას და $\{n_k \geq 2 : k \in \mathbb{N}\}$ არის ქვემიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{v(n_k) + v^*(n_k)}{\Phi_{n_k}} = \infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \frac{S_{n_k} f}{\Phi_{n_k}} \right\|_1 \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.$$

[150]-ში (იხ. აგრეთვე [153]) დამტკიცებულია, რომ თუ $f \in H_1$ და $M_k < n \leq M_{k+1}$, მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|S_n f - f\|_{H_1} \leq c\left(v(n) + v^*(n)\right) \omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_k}, f\right).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $f \in H_1$ და $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_{|n_k|}}, f\right) = o\left(\frac{1}{v(n_k) + v^*(n_k)}\right), \text{ როცა } k \to \infty,$$

მაშინ $\|S_{n_k} f - f\|_{H_1} \to 0,$ როცა $k \to \infty$. უფრო მეტიც, თუ $\{n_k : k \geq 1\}$ არის არაუარყოფითი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(v(n_k) + v^*(n_k)\right) = \infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1$ და $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{n_k :\in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა რომლისთვისაც

$$\omega_{H_1}\left(\frac{1}{M_{|\alpha_k|}}, f\right) = O\left(\frac{1}{v(\alpha_k) + v^*(\alpha_k)}\right)$$

და $\limsup_{k\to\infty} \|S_{\alpha_k} f - f\|_1 > c > 0$ როცა $k \to \infty$.

შიმონმა [117]-ში დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $f \in H_p$-სთვის არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|S_k f\|_p^p}{k^{2-p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p, \qquad (0 < p < 1).$$

ამ შედეგის სიზუსტე გარკვეული აზრით, დაამტკიცულია ტეფნაძის [140] მიერ. კერძოდ, თუ $0 < p < 1$ და $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს $\overline{\lim_{n\to\infty}} \Phi_n = +\infty$ პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|S_k f\|_{weak-L_p}^p \Phi_k}{k^{2-p}} = \infty.$$

გატმა [38]-ში ყოველი $f\in H_1$-სთვის დაამტკიცა შემდეგი ძლიერად კრებადობის თეორემა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_kf-f\|_1}{k}=0.$$

ანალოგიური შედეგი ტრიგონომეტრიული სისტემებისთვის მიიღო სმიტმა [130], უოლშ-პალის სისტემისთვის შიმონმა [116] და ვილენკინის ტიპის სისტემებისთვის ბლახოტამ [13]. უფრო მეტიც, ყოველი $f\in H_1$-სთვის, არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_kf\|_1}{k}\leq c\|f\|_{H_1}\quad \text{და}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|S_kf\|_1}{k}=\|f\|_{H_1}\quad (n=2,3...)\,.$$

ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის იანომ [180] დაამკიცა, რომ

$$\|K_n\|\leq 2\quad (n\in\mathbb{N}).$$

შესაბამისად,

$$\|\sigma_nf-f\|_p\to 0,\quad \text{როცა}\quad n\to\infty,\ \ (f\in L_p,\ \ 1\leq p\leq\infty).$$

ამასთან (იხ. [64,111]) კრებადობის სიჩქარე არამუდმივი ფუნქციებისთვის ვერ იქნება $O\left(n^{-1}\right)$ $(n\to\infty)$ რიგზე დიდი. უფრო დაწვრილებით, თუ $f\in L_p$, $1\leq p\leq\infty$ და

$$\|\sigma_{M_n}f-f\|_p=o\left(\frac{1}{M_n}\right),\ \ \text{როცა}\quad n\to\infty,$$

მაშინ f არის მუდმივი ფუნქცია.

ფრიდლიმ [34]-ში L_p ფუნქნციებისთვის გამოიყენა უწყვეტობის ორობითი მოდული, რომელიც ვილენკინ-ფეიერის საშუალოების კრებადობის სიჩქარის შეფასების საშუალებას იძლევა. ასევე ცნობილია, რომ (იხ. წიგნი [4] და [111])

$$\|\sigma_nf-f\|_p$$
$$\leq c_p\omega_p\left(\frac{1}{M_N},f\right)+c_p\sum_{s=0}^{N-1}\frac{M_s}{M_n}\omega_p\left(\frac{1}{M_s},f\right),\quad (1\leq p\leq\infty,\ \ n\in\mathbb{N})\,.$$

ამ შეფასების გამოყენებით დაუყოვნებლივ მივიღებთ, რომ თუ $f\in lip\,(\alpha,p)$, ე.ი.,

$$\omega_p\left(\frac{1}{M_n},f\right)=O\left(\frac{1}{M_n^{\alpha}}\right),\quad n\to\infty,$$

მაშინ

$$\|\sigma_nf-f\|_p=\begin{cases}O\left(\frac{1}{M_N}\right), & \text{თუ } \alpha>1,\\ O\left(\frac{N}{M_N}\right), & \text{თუ } \alpha=1,\\ O\left(\frac{1}{M_N^{\alpha}}\right), & \text{თუ } \alpha<1.\end{cases}$$

მეორეს მხრივ, თუ $1\leq p\leq\infty$, $f\in L_p$ და

$$\|\sigma_{M_n}f-f\|_p=o\left(1/M_n\right),\ \text{როცა}\ n\to\infty,$$

მაშინ f არის მუდმივი ფუნქცია $f = const.$

ვეისმა [174]-ში განიხილა ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების ფეიერის საშუალოების ნორმით კრებადობა და დაამტკიცა, რომ

$$\|\sigma_k f\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad p > 1/2 \quad \text{და} \quad f \in H_p. \tag{2.1.8}$$

ამ შედეგის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{n^{2p-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p, \quad (1/2 < p < \infty).$$

(2.1.8) სამართლიანი რომ ყოფილიყო $0 < p \leq 1/2$-სთვისაც, მაშინ დაუყოვნებლივ მივიღებდით

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p, \quad (0 < p \leq 1/2), \tag{2.1.9}$$

თუმცა, ტეფნაძემ [137]-ში აჩვენა, რომ $p > 1/2$ პირობა (2.1.8)-ში არის არსებითი. კერძოდ, მან დაამტკიცა, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\sigma_n f\|_{1/2} = +\infty.$$

ვილენკინის სისტემებისთვის ტეფნაძემ [141] დაამტკიცა, რომ (2.1.9) სამართლიანია იმის მიუხედავად, რომ (2.1.8) უტოლობა არ არის სამართლიანი $0 < p \leq 1/2$-სთვის.

ფეიერის საშუალოებისთვის ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობა მიიღეს პერსონმა, ტეფნაძემ, თუთბერიძემ და ვალმა [102]-ში.

ერთ-განზომილებიან შემთხვევაში სუსტი ტიპის უტოლობა

$$\mu(\sigma^* f > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1, \qquad (f \in L_1, \quad \lambda > 0)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის შეგვიძლია ვნახოთ ზიგმუნდის [186] წიგნში, შიპმა [110]-ში აჩვენა უოლშის მწკრივებისთვის და პალმა და შიმონმა [99] შემოსაზღვრული ვილენკინის სისტემისთვის. აქედან დავასკვნით, რომ თუ $f \in L_1$-ს, მაშინ

$$\sigma_n f(x) \to f(x), \quad \text{თ.ყ}$$

უფრო მეტიც, გოგინავამ და გოგოლაძემ [53]-ში განმარტეს ვილენკინ-ლებეგის წერტილები და დაამტკიცეს, რომ ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციისთვის თ.ყ. წერტილი არის ვილენკინ-ლებეგის წერტილი და $\sigma_n f(x) \to f(x)$ ნებისმიერი ვილენკინ-ლებეგის წერტილისთვის.

ფუჯიმ [36] და შიმონმა [115] დაამტკიცეს, რომ σ^* არის შემოსაზღვრული H_1-დან L_1-ში. ეს შედეგი განაზოგადა ვეისმა [174] და დაამტკიცა σ^*-ის შემოსაზღვრულობა ჰარდის H_p მარტინგალური სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში როცა $p > 1/2$. შიმონმა [117] ააგო კონტრმაგალითი, რომელიც აჩვენებს რომ შემოსაზღვრულობა არაა სამართლიანი $0 < p < 1/2$-სთვის. კონტრმაგალითი $p = 1/2$-

სთვის ააგო გოგინავამ [48], (აგრეთვე იხ. [23] და [24]). ტეფნაძემ [137] დაამტკიცა, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n f\|_{1/2} = +\infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$, როცა $0 < p < 1/2$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n f\|_{weak-L_p} = +\infty.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ

$$\|\sigma^* f\|_{1/2} = +\infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს $f \in H_p$ მარტინგალი $0 < p < 1/2$-სთვის ისეთი, რომ

$$\|\sigma^* f\|_{weak-L_p} = +\infty.$$

ვეისმა [169] აჩვენა, რომ σ^* არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში, ხოლო ტეფნაძემ [139] აჩვენა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\widetilde{\sigma}_p^*$

$$\widetilde{\sigma}_p^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n|}{(n+1)^{1/p-2}},$$

სადაც $0 < p < 1/2$, არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაკლებადი $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(n+1)^{1/p-2}}{\Phi_n} = +\infty,$$

გვაქვს

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\| \frac{\sigma_{M_{2n_k}+1} f_k}{\Phi_{M_{2n_k}+1}} \right\|_{weak-L_p}}{\|f_k\|_{H_p}} = \infty.$$

ამ შედეგებიდან დაუყოვნებლივ მივიღებთ

$$\|\sigma_n f\|_p \leq c_p (n+1)^{1/p-2} (n+1) \|f\|_{H_p},$$

მაგრამ დამტკიცებულია უფრო ძლიერი უტოლობაც (დეტალებისთვის იხ. [148]). კერძოდ, თუ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p$ მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|\sigma_n f\|_{H_p} \leq c_p n^{1/p-2} \|f\|_{H_p}.$$

[138]-ში (უოლშის სისტემებისთვის იხ. [49]) დამტკიცებულია, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$\widetilde{\sigma}^*$, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\widetilde{\sigma}^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\sigma_n|}{\log^2(n+1)},$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან ლებეგის $L_{1/2}$ სივრცეში. უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაკლებადი $\{\Phi_n : n\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის დაკმაყოფილებულია შემდეგი პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^2(n+1)}{\Phi_n} = +\infty,$$

გვაქვს, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\frac{\sigma_{q_{n_k}} f_k}{\Phi_{q_{n_k}}}\right\|_{1/2}}{\|f_k\|_{H_{1/2}}} = \infty.$$

როგორც შედეგი ვღებულობთ, რომ

$$\|\sigma_n f\|_{1/2} \leq c \log^2(n+1) \|f\|_{H_{1/2}}.$$

მაგრამ დამტკიცებულია უფრო ძლიერი შედეგი (დეტალებისთვის იხ. [148]). კერძოდ, თუ $f\in H_{1/2}$ მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|\sigma_n f\|_{H_{1/2}} \leq c \log^2(n+1) \|f\|_{H_{1/2}}.$$

ანალოგიური შედეგები უოლშ-კაჩმარსკის სისტემისათვის დამტკიცებულია [55]-ში და [140]-ში.

ერთგანზომილებიანი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივებისათვის ვეისმა [174] დაამტკიცა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sigma^{\#} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_{M_n} f|$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური H_p-სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში ნებისმიერი $p>0$-თვის. მან ასევე აჩვენა რომ

$$\|\sigma_{M_n} f - f\|_{H_p} \to 0, \quad f\in H_p \quad (p>0). \tag{2.1.10}$$

მეორეს მხრივ, ოპერატორი $|\sigma_{M_n} f|$ არ არის შემოსაზღვრული H_p სივრციდან H_p სივრცეში, როცა $0<p\leq 1$. ეს შედეგი, უოლშის სისტემისთვის დაამტკიცა გოგინავამ [51], ხოლო შემოსაზღვრული ვილენკინის სისტემებისთვის პერსონმა და ტეფნაძემ [107].

ფეიერის საშუალოების აპროქსიმაციული თვისებები ერთ-განზომილებიანი უოლში-ფურიეს მწკრივებისათვის განხილულია [101]-ში და [161]-ში.

ტეფნაძემ [108]-ში დაამტკიცა, რომ თუ $0<p\leq 1/2$ და $\{\alpha_k : k\in\mathbb{N}\}$ არის დადებით რიცხვთა ზრდადი ქვემიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho(\alpha_k) = \varkappa < c < \infty,$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}^{*,\triangle} f := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\sigma_{\alpha_k} f|$$

შემოსაზღვრულია ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. უფრო მეტიც, თუ $0 < p \leq 1/2$ და $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის დადებით რიცხვთა ზრდადი ქვემიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho\left(\alpha_k\right) = \infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{\alpha_k} f\|_{weak-L_p} = \infty, \quad \left(0 < p < 1/2\right).$$

აქედან დაუყოვნებლივ გამომდინარეობს, რომ $0 < p \leq 1/2$-სთვის და $f \in H_p$-სთვის არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|\sigma_{n_k} f\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad k \in \mathbb{N}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho\left(n_k\right) < c < \infty.$$

კერძო შემთხვევაში მივიღებთ, რომ როცა $p > 0$ და $f \in H_p$, მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|\sigma_{M_n} f\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad \left(p > 0\right). \tag{2.1.11}$$

[142]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ $0 < p < 1/2$, $f \in H_p$ და

$$\omega_p\left(\frac{1}{M_n}, f\right) = o\left(\frac{1}{M_n^{1/p-2}}\right) \text{როცა } \ n \to \infty,$$

მაშინ

$$\|\sigma_n f - f\|_{H_p} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ $\left(0 < p < 1/2\right)$ რომლისთვისაც

$$\omega\left(\frac{1}{M_n}, f\right)_{H_p} = O\left(\frac{1}{M_n^{1/p-2}}\right) \ \text{ როცა } \ n \to \infty$$

და

$$\|\sigma_n f - f\|_{weak-L_p} \nrightarrow 0, \ \text{ როცა } \ n \to \infty.$$

როცა $p = 1/2$ მაშინ მივიღებთ, რომ თუ $f \in H_{1/2}$ და

$$\omega_{H_{1/2}}\left(\frac{1}{M_n}, f\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ როცა } \ n \to \infty, \tag{2.1.12}$$

მაშინ

$$\|\sigma_n f - f\|_{H_{1/2}} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ რომლისთვისაც

$$\omega_{H_{1/2}}\left(\frac{1}{M_n}, f\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ როცა } n \to \infty$$

და

$$\|\sigma_n f - f\|_{1/2} \nrightarrow 0, \quad \text{როცა} \quad n \to \infty.$$

როგორც მიღებული შედეგების კერძო შემთხვევა ჩვენ ასევე ჩამოვაყალიბებთ მიღებულ შედეგებს უოლშის სისტემისთვის, რათა ნათლად დავინახოთ განშლადობის სისწრაფე განსხვავებული ქვემიმდევრობებისთვის. თუ $0 < p < 1/2, \ f \in H_p$, მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\|\sigma_{M_n+1} f\|_{H_p} \leq c_p M_n^{1/p-2} \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.13}$$

და

$$\left\|\sigma_{M_n+M_{[n/2]}} f\right\|_{H_p} \leq c_p M_n^{1/2p-1} \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.14}$$

უფრო მეტიც, $M_n^{1/p-2}$ და $M_n^{1/2p-1}$ რიცხვები (2.1.13) და (2.1.14) უტოლობებში არის ზუსტი.

ბლახოტამ და ტეფნაძემ [16]-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p$, მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p,$$

უფრო მეტიც, თუ $0 < p < 1/2$ და $\{\Phi_k \ : k \in \mathbb{N}\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს $\Phi_n \uparrow \infty$ პირობას და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k^{2-2p}}{\Phi_k} = \infty, \tag{2.1.15}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\sigma_k f\|_{weak-L_p}^p}{\Phi_k} = \infty.$$

დასკვნის სახით მივიღებთ, რომ თუ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p$, მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k^{1-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f-f\|_{H_p}^p}{k^{1-2p}}=0,$$

და

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_p}^p}{k^{1-2p}}=\|f\|_{H_p}^p.$$

[16]-ში ბლახოტას და ტეფნაძის მიერ ასევე განხილული იქნა $p=1/2$ შემთხვევა. მათ დაამტკიცეს, რომ თუ $f\in H_{1/2}$ მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k}\leq c\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

დასკვნის სახით მივიღებთ, თუ $f\in H_{1/2}$, მაშინ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{k}\leq c\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f-f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{k}=0$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{k}=\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

2.2 დირიხლეს და ფეიერის გულების შეფასებები ვილენკინის სისტემებისთვის

ტეფნაძის მიერ [142]-ში დამტკიცებული იქნა შემდეგი ლემა:

ლემა 2.1. *დავუშვათ* $x\in I_s\backslash I_{s+1},\quad s=0,...,N-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_N}|D_n(x-t)|\,d\mu(t)\leq\frac{cM_s}{M_N},$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. დავუშვათ $x\in I_s\backslash I_{s+1},\quad s=0,...,N-1$. (1.2.3) და (1.2.5)-დან გვექნება, რომ

$$|D_n(x)|\leq\sum_{j=0}^{s}n_jD_{M_j}(x)=\sum_{j=0}^{s}n_jM_j\leq cM_s.$$

თუ $t\in I_N$ და $x\in I_s\backslash I_{s+1},\quad s=0,...,N-1$ მაშინ მივიღებთ, რომ $x-t\in I_s\backslash I_{s+1}$. ზემოთ მოცემული შეფასების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$|D_n(x-t)|\leq cM_s$$

და

$$\int_{I_N}|D_n(x-t)|\,d\mu(t)\leq\frac{cM_s}{M_N}.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

■

შემდეგი ლემის დამტკიცება შეგვიძლია ვნახოთ [138, 139]-ში:

ლემა 2.2. *ვთქვათ* $n \in \mathbb{N}$ *და* $x \in I_N^{k,l}$, *სადაც* $k < l$. *მაშინ*

$$K_{M_n}(x) = 0, \quad \textit{თუ} \;\; n > l. \tag{2.2.1}$$

და

$$|K_{M_n}(x)| \leq cM_k. \tag{2.2.2}$$

უფრო მეტიც,

$$\int_{G_m} |K_{M_n}| \, d\mu \leq c < \infty, \tag{2.2.3}$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

შემდეგი ლემის დამტკიცება მოცემულია აგაევის, ვილენკინის, ჯაფარლის და რუბინშტეინის წიგნში [4]:

ლემა 2.3. *დავუშვათ* $n \in \mathbb{N}$. *მაშინ*

$$n\,|K_n| \leq c \sum_{l=\langle n\rangle}^{|n|} M_l \,|K_{M_l}| \leq c \sum_{l=0}^{|n|} M_l \,|K_{M_l}| \tag{2.2.4}$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

2.4 და 2.5 ლემები დამტკიცებულია ტეფნაძის [138, 139] (ასევე იხ. ბლახოტა, ტეფნაძე [16]) მიერ:

ლემა 2.4. *დავუშვათ* $x \in I_N^{k,l}, \; k = 0, \ldots, N-2, \; l = k+1, \ldots, N-1.$ *მაშინ*

$$\int_{I_N} |K_n(x-t)| \, d\mu(t) \leq \frac{cM_l M_k}{nM_N}.$$

ვთქვათ $x \in I_N^{k,N}, \; k = 0, \ldots, N-1.$ *მაშინ*

$$\int_{I_N} |K_n(x-t)| \, d\mu(t) \leq \frac{cM_k}{M_N},$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

შემდეგი ლემა არის ლემა 2.4-ის მარტივი შედეგი.

ლემა 2.5. *ვთქვათ* $x \in I_N^{k,l}, \qquad k = 0, \ldots, N-1, \qquad l = k+1, \ldots, N. \qquad$ *მაშინ*

$$\int_{I_N} |K_n(x-t)| \, d\mu(t) \leq \frac{cM_l M_k}{M_N^2}, \quad n \geq M_N,$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ფეიერის გულების რამდენიმე ახალი შეფასება, რომელიც გამოყენებული იქნება უარყოფითი შედეგების დასამტკიცებლად. ლემა 2.6 დამტკიცებულია ბლახოტა, ტეფნაძის [16] მიერ.

ლემა 2.6. *დავუშვათ t, s_n, $1 \leq s_n \leq m_n - 1$ და $n \in \mathbb{N}$. მაშინ*

$$|K_{s_n M_n}(x)| \geq \frac{M_n}{2\pi s_n},\ x \in I_{n+1}(e_{n-1} + e_n). \tag{2.2.5}$$

უფრო მეტიც, თუ $x \in I_t \backslash I_{t+1}$, $x - x_t e_t \notin I_n$ და $n > t$, მაშინ

$$K_{s_n M_n}(x) = 0. \tag{2.2.6}$$

ლემა 2.7 დამტკიცებულია ტეფნაძის და პერსონის [108]-ში მიერ:

ლემა 2.7. *დავუშვათ $n \in \mathbb{N}$, $\langle n \rangle \neq |n|$ და $x \in I_{\langle n \rangle + 1}\left(e_{\langle n \rangle - 1} + e_{\langle n \rangle}\right)$. მაშინ*

$$|nK_n(x)| = \left|\left(n - M_{|n|}\right) K_{n - M_{|n|}}(x)\right| \geq \frac{M_{\langle n \rangle}^2}{2\pi\lambda},$$

სადაც $\lambda := \sup_{n \in \mathbb{N}} m_n$.

უოლშის სისტემისათვის ლემა 2.8-ის ანალოგი დამტკიცებულია [141]-ში ტეფნაძის მიერ, ხოლო შედეგი 2.9 არის მისი მარტივი კერძო შემთხვევა. კერძო შემთხვევებში მსგავსი ტიპის შეფასებები დამტკიცებულია ბლაჰოტას, გატის და გოგინავას მიერ [23]-ში და [24]-ში.

ლემა 2.8. *დავუშვათ*

$$n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=l_i}^{m_i} n_k M_k,$$

სადაც

$$0 \leq l_1 \leq m_1 \leq l_2 - 2 < l_2 \leq m_2 \leq ... \leq l_s - 2 < l_s \leq m_s.$$

მაშინ

$$n\,|K_n(x)| \geq cM_{l_i}^2, \qquad x \in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1} + e_{l_i}\right),$$

სადაც $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_n$ და c არის აბსოლუტური მუდმივი.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1} + e_{l_i}\right)$. (1.2.3)-დან და (1.2.4)-დან (2.2.1) უტოლობით ლემა 2.2-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$D_{M_{l_i}} = 0$$

და

$$D_{s_{n_k} M_{s_{n_k}}} = K_{s_{n_k} M_{s_{n_k}}} = 0, \ \ s_{n_k} > l_i.$$

რადგან $s_{n_1} > s_{n_2} > \cdots > s_{n_r} \geq 0$ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} n^{(k)} &= n - \sum_{i=1}^{k} s_{n_i} M_{n_i} \\ &= \sum_{i=k+1}^{s} s_{n_i} M_{n_i} \leq \sum_{i=0}^{n_{k+1}} (m_i - 1) M_i \\ &= m_{n_{k+1}} M_{n_{k+1}} - 1 \leq M_{n_k}. \end{aligned}$$

(1.2.9)-ის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} n\,|K_n| &\geq \left| s_{l_i} M_{l_i} K_{s_{l_i} M_{l_i}} \right| \\ &- \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{k=l_r}^{m_r} |s_k M_k K_{s_k M_k}| \\ &- \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{k=l_r}^{m_r} |M_k D_{s_k M_k}| \\ &= I_1 - I_2 - I_3. \end{aligned}$$

ვთქვათ $x \in I_{l_i+1}\,(e_{l_i-1} + e_{l_i})$ და $1 \leq s_{l_i} \leq m_{l_i} - 1$. ლემა 2.6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$I_1 = \left| s_{l_i} M_{l_i} K_{s_{l_i} M_{l_i}} \right| \geq \frac{M_{l_i}^2}{2\pi} \geq \frac{2M_{l_i}^2}{9}.$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k} n_s^2 M_s^2 &\leq \sum_{s=0}^{k} (m_s - 1)^2 M_s^2 \\ &\leq \sum_{s=0}^{k} m_s^2 M_s^2 - 2\sum_{s=0}^{k} m_s M_s^2 + \sum_{s=0}^{k} M_s^2 \\ &= \sum_{s=0}^{k} M_{s+1}^2 - 2\sum_{s=0}^{k} M_{s+1} M_s + \sum_{s=0}^{k} M_s^2 \\ &= M_{k+1}^2 + 2\sum_{s=0}^{k} M_s^2 - 2\sum_{s=0}^{k} M_{s+1} M_s - M_0^2 \\ &\leq M_{k+1}^2 - 1. \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k} n_s M_s &\leq \sum_{s=0}^{k} (m_s - 1) M_s \\ &= m_k M_k - m_0 M_0 \\ &\leq M_{k+1} - 2. \end{aligned}$$

რადგან $m_{i-1} \leq l_i - 2$, თუ გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ შეფასებას, გვექნება

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{s=0}^{l_i-2} \left| n_s M_s K_{n_s M_s}(x) \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^{l_i-2} n_s M_s \frac{(n_s M_s + 1)}{2} \\ &\leq \frac{(m_{l_i-2} - 1) M_{l_i-2}}{2} \sum_{s=0}^{l_i-2} (n_s M_s + 1) \\ &\leq \frac{(m_{l_i-2} - 1) M_{l_i-2}}{2} M_{l_i-1} \\ &+ \frac{(m_{l_i-2} - 1) M_{l_i-2}}{2} l_i \\ &\leq \frac{M_{l_i-1}^2}{2} - \frac{M_{l_i-2} M_{l_i-1}}{2} + M_{l_i-1} l_i. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

I_3-სთვის გვაქვს

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{k=0}^{l_i-2} \left| M_k D_{n_k M_k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{l_i-2} n_k M_k^2 \\ &\leq M_{l_i-2} \sum_{k=0}^{l_i-2} n_k M_k \\ &\leq M_{l_i-1} M_{l_i-2} - 2 M_{l_i-2}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

(2.2.7)-(2.2.8)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} n \left| K_n(x) \right| &\geq I_1 - I_2 - I_3 \\ &\geq \frac{M_{l_i}^2}{2\pi} + \frac{3}{2} + 2 M_{l_i-2} \\ &- \frac{M_{l_i-1} M_{l_i-2}}{2} - \frac{M_{l_i-1}^2}{2} - M_{l_i-1} l_i \\ &\geq \frac{M_{l_i}^2}{2\pi} - \frac{M_{l_i}^2}{16} - \frac{M_{l_i}^2}{8} + \frac{7}{2} - M_{l_i-1} l_i \\ &\geq \frac{2 M_{l_i}^2}{9} - \frac{3 M_{l_i}^2}{16} + \frac{7}{2} - M_{l_i-1} l_i \\ &\geq \frac{M_{l_i}^2}{144} - M_{l_i-1} l_i. \end{aligned}$$

ვივარაუდოთ, რომ $l_i \geq 4$. მაშინ

$$\begin{aligned} n \left| K_n(x) \right| &\geq \frac{M_{l_i}^2}{36} - \frac{M_{l_i}}{4} \\ &\geq \frac{M_{l_i}^2}{36} - \frac{M_{l_i}^2}{64} \\ &\geq \frac{5 M_{l_i}^2}{36 \cdot 16} \geq \frac{M_{l_i}^2}{144}. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

■

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, შემდეგი შედეგი არის ლემა 2.8-ის კერძო შემთხვევა:

შედეგი 2.9. *ვთქვათ* $2 < n \in \mathbb{N}_+$ *და* $q_n = M_{2n} + M_{2n-2} + ... + M_2 + M_0$. *მაშინ*

$$q_{n-1} \left| K_{q_{n-1}}(x) \right| \geq \frac{M_{2k}^2}{144}, \qquad x \in I_{2k+1}\left(e_{2k-1} + e_{l_{2k}}\right)\text{-თვის},$$

სადაც $k = 0, 1, ..., n$.

2.3 ჰარდის ტიპის უტოლობები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების H_p ნორმებისათვის

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამებისთვის ზოგიერთ ძლიერად შეჯამებადობის თეორემას. შემდეგი თეორემა დამტიცებულია თუთბერიძის [160] მიერ:

თეორემა 2.10. *ა) დავუშვათ* $f \in H_1$. *მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი* c *ისეთი, რომ*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^{n} \left\| S_k f \right\|_1 \leq c \left\| f \right\|_{H_1}.$$

ბ) დავუშვათ $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ *არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\varphi_n} = +\infty. \tag{2.3.1}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_1$ *ისეთი, რომ*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \varphi_n} \sum_{k=1}^{n} \left\| S_k f \right\|_1 = \infty.$$

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილი არის გატის [38] შესაბამისი რეზულტატის უშუალო შედეგი. გადმოცემის სისრულისთვის ჩვენ აქ ჩვენ მას დავამტკიცებთ, რისთვისაც გამოვიყენებთ (2.1.7)-ს, საიდანაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^{n} \left\| S_k f \right\|_1 \leq \frac{c \left\| f \right\|_{H_1}}{n \log n} \sum_{k=1}^{n} \log k \leq c \left\| f \right\|_{H_1}.$$

ამით თეორემა 2.10-ის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

(2.3.1) პირობის ძალით არსებობს დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log M_{\alpha_k}}{\varphi_{2M_{\alpha_k}}} = +\infty$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}{\log^{1/2} M_{\alpha_k}} < c < \infty. \tag{2.3.2}$$

დავუშვათ $f=(f^{(n)},\ \ n\in\mathbb{N})$ არის მარტინგალი, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^{(n)}:=\sum_{\{k;\,2\alpha_k<n\}}\lambda_k a_k,$$

სადაც

$$a_k=r_{\alpha_k}D_{M_{\alpha_k}}=D_{2M_{\alpha_k}}-D_{M_{\alpha_k}}$$

და

$$\lambda_k=\frac{\varphi^{1/2}_{2M_{\alpha_k}}}{\log^{1/2}M_{\alpha_k}}.$$

ლემა 1.3-დან, თუ გამოვიყენებთ (2.3.2) შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f\in H_1$. უფრო მეტიც,

$$\widehat{f}(j)=\begin{cases}\lambda_k, & j\in\{M_{\alpha_k},...,2M_{\alpha_k}-1\},\ k\in\mathbb{N}\\ 0\,, & j\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{M_{\alpha_k},...,2M_{\alpha_k}-1\}.\end{cases}\tag{2.3.3}$$

თუ გამოვიყენებთ

$$D_{j+M_{\alpha_k}}=D_{M_{\alpha_k}}+\psi_{_{M_{\alpha_k}}}D_j,\qquad \text{როცა}\ \ j\leq M_{\alpha_k},$$

(2.3.3)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}S_jf &= S_{M_{\alpha_k}}f+\sum_{v=M_{\alpha_k}}^{j-1}\widehat{f}(v)\psi_v \qquad (2.3.4)\\ &= S_{M_{\alpha_k}}f+\lambda_k\sum_{v=M_{\alpha_k}}^{j-1}\psi_v\\ &= S_{M_{\alpha_k}}f+\lambda_k\left(D_j-D_{M_{\alpha_k}}\right)\\ &= S_{M_{\alpha_k}}f+\lambda_k\psi_{M_{\alpha_k}}D_{j-M_{\alpha_k}}\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

(2.1.1)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|I_1\|_1\leq\left\|S_{M_{\alpha_k}}f\right\|_1\leq c\,\|f\|_{H_1}\,.\tag{2.3.5}$$

(1.3.1)-ის და (2.3.5)-ის ქვედა შეფასების კომბინაციით მივიღებთ

$$\begin{aligned}\|S_nf\|_1 &\geq \|I_2\|_1-\|I_1\|_1\\ &\geq \lambda_kL\left(n-M_{\alpha_k}\right)-c\,\|f\|_{H_1}\\ &\geq c\lambda_kv\left(n-M_{\alpha_k}\right)-c\,\|f\|_{H_1}\,.\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, (1.3.2)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ

$$
\begin{aligned}
& \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{1}{n\varphi_n}\sum_{k=1}^{n}\|S_kf\|_1 \\
\geq\ & \frac{1}{2M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{\left\{M_{\alpha_k}\leq l\leq 2M_{\alpha_k}\right\}}\|S_lf\|_1 \\
\geq\ & \frac{c}{2M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{\left\{M_{\alpha_k}\leq l\leq 2M_{\alpha_k}\right\}}\left(\frac{v\left(l-M_{\alpha_k}\right)\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}{\log^{1/2}M_{\alpha_k}}-c\left\|f\right\|_{H_1}\right) \\
\geq\ & \frac{c\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}{2M_{\alpha_k}\log^{1/2}M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{l=1}^{M_{\alpha_k}-1}v\left(l\right)-c\left\|f\right\|_{H_1}^{1/2} \\
\geq\ & \frac{c\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}\log M_{\alpha_k}}{\log^{1/2}M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}} \\
\geq\ & \frac{c\log^{1/2}M_{\alpha_k}}{\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}\to\infty,\ \text{როცა}\ \ k\to\infty.
\end{aligned}
$$

ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია

■

ვეისის [174] თეორემის გამოყენებით $p=1$ შემთხვევაში გვექნება, რომ არსებობს c აბსოლუტური მუდმივი, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sigma_nf\|_1<c\left\|f\right\|_{H_1}.$$

ესე იგი,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_kf\right\|_1<c\left\|f\right\|_{H_1}. \tag{2.3.6}$$

ამ შეფასების გათვალისწინებით იბადება საინტერესო შეკითხვა, იმის შესახებ, რომ თუ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|S_kf\|_1<c\left\|f\right\|_{H_1},$$

რომელიც იქნებოდა (2.3.6) უტოლობის განზოგადება. სამწუხაროდ, ჩვენ გვაქვს უარყოფითი პასუხი ამ კითხვაზე:

შედეგი 2.11. *არსებობს მარტინგალი $f\in H_1$ ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|S_kf\|_1=\infty.$$

2.4 ჰარდის ტიპის უტოლობები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების ფეიერის საშუალოების H_p ნორმებისათვის

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია პეროსნის, ტეფნაძის, თუთბერიძის და ვალის [102] მიერ:

თეორემა 2.12. *ა) ვთქვათ $f \in H_{1/2}$. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n} \|\sigma_k f\|_{1/2}^{1/2} \le c\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

ბ) ვთქვათ $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\varphi_n} = +\infty. \tag{2.4.1}$$

მაშინ არსებობს ფუნქცია $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\varphi_n}\sum_{k=1}^{n} \|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2} = \infty.$$

შედეგი 2.13. *არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}$ ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|\sigma_k f\|_{1/2}^{1/2} = \infty.$$

დამტკიცება. (2.1)-ის გამოყენებით მტკიცდება, რომ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2} \le c\log k\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}, \quad k = 1,2,...$$

აქედან,

$$\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n} \|\sigma_k f\|_{H_{1/2}}^{1/2} \le \frac{c\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k \le c\,\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

თეორემის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

(2.4.1) პირობის ძალით არსებობს დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k : k\in\mathbb{N}\}$ ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log M_{\alpha_k}}{\varphi_{2M_{\alpha_k}}} = +\infty$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}{\log^{1/2} M_{\alpha_k}} < c < \infty. \tag{2.4.2}$$

დავუშვათ $f = (f^{(n)}\ \ n\in\mathbb{N})$ არის მარტინგალი, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად

$$f^{(n)} := \sum_{\{k;\,2\alpha_k<n\}} \lambda_k a_k,$$

სადაც

$$a_k = M_{\alpha_k} r_{\alpha_k} D_{M_{\alpha_k}} = M_{\alpha_k}(D_{2M_{\alpha_k}} - D_{M_{\alpha_k}})$$

და

$$\lambda_k = \frac{\varphi_{2M_{\alpha_k}}}{\log M_{\alpha_k}}.$$

მას შემდეგ, რაც

$$S_{2^A}a_k = \begin{cases} a_k, & \alpha_k < A, \\ 0, & \alpha_k \geq A, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

$$\text{supp}(a_k) = I_{\alpha_k}, \ \int_{I_{\alpha_k}} a_k d\mu = 0, \ \|a_k\|_\infty \leq M_{\alpha_k}^2 = \mu(\text{supp } a_k)^{-2},$$

თუ გამოვიყენებთ 1.3 ლემას და (2.4.2)-ს დავასკვნით, რომ $f \in H_{1/2}$. უფრო მეტიც,

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} M_{\alpha_k}\lambda_k, & j \in \{M_{\alpha_k}, ..., 2M_{\alpha_k} - 1\}, \ k \in \mathbb{N} \\ 0\ , & j \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{M_{\alpha_k}, ..., 2M_{\alpha_k} - 1\}. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

ცხადია შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$\begin{aligned} \sigma_n f &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{M_{\alpha_k}-1} S_j f + \frac{1}{n}\sum_{j=M_{\alpha_k}}^{n-1} S_j f \\ &= I + II. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

დავუშვათ $M_{\alpha_k} \leq j < 2M_{\alpha_k}$. რადგან

$$D_{j+M_{\alpha_k}} = D_{M_{\alpha_k}} + \psi_{M_{\alpha_k}} D_j, \qquad \text{როცა} \ \ j \leq M_{\alpha_k},$$

თუ გამოვიყენებთ (2.4.4) მივიღებთ

$$\begin{aligned} S_j f &= S_{M_{\alpha_k}} f + \sum_{v=M_{\alpha_k}}^{j-1} \widehat{f}(v)\psi_v \\ &= S_{M_{\alpha_k}} f + M_{\alpha_k}\lambda_k \sum_{v=M_{\alpha_k}}^{j-1} \psi_v \\ &= S_{M_{\alpha_k}} f + M_{\alpha_k}\lambda_k \left(D_j - D_{M_{\alpha_k}}\right) \\ &= S_{M_{\alpha_k}} f + \lambda_k \psi_{M_{\alpha_k}} D_{j-M_{\alpha_k}} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

(2.4.6)-ის გამოყენებით შევაფასოთ II. შეგვიძლია დავასკვნათ

$$\begin{aligned} II &= \frac{n - M_{\alpha_k}}{n} S_{M_{\alpha_k}} f \\ &\quad + \frac{\lambda_k M_{\alpha_k}}{n} \sum_{j=M_{2\alpha_k}}^{n-1} \psi_{M_{\alpha_k}} D_{j-M_{\alpha_k}} \\ &= II_1 + II_2. \end{aligned}$$

II_2 შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|II_2| = \frac{\lambda_k M_{\alpha_k}}{n} \left| \psi_{M_{\alpha_k}} \sum_{j=0}^{n-M_{\alpha_k}-1} D_j \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda_k M_{\alpha_k}}{n}\left(n-M_{\alpha_k}\right)\left|K_{n-M_{\alpha_k}}\right| \\
&\geq \lambda_k\left(n-M_{\alpha_k}\right)\left|K_{n-M_{\alpha_k}}\right|.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ $n=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=l_i}^{m_i} M_k,$ სადაც

$$0 \leq l_1 \leq m_1 \leq l_2-2 < l_2 \leq m_2 \leq ... \leq l_s - 2 < l_s \leq m_s.$$

ლემა 2.4-ის გამოყენებით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\left|II_2\right| &\geq c\lambda_k\left|\left(n-M_{\alpha_k}\right)K_{n-M_{\alpha_k}}(x)\right| \\
&\geq c\lambda_k M_{l_i}^2, \qquad x\in I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right).
\end{aligned}
$$

მაშასადამე,

$$
\begin{aligned}
&\int_{G_m}\left|II_2\right|^{1/2}d\mu \\
\geq &\sum_{i=1}^{s-1}\int_{I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)}\left|II_2\right|^{1/2}d\mu \\
\geq &\, c\sum_{i=1}^{s-1}\int_{I_{l_i+1}\left(e_{l_i-1}+e_{l_i}\right)}\lambda_k^{1/2}M_{l_i}d\mu \\
\geq &\, c\lambda_k^{1/2}(s-1) \\
\geq &\, c\lambda_k^{1/2}v\left(n-M_{\alpha_k}\right).
\end{aligned} \tag{2.4.7}
$$

(2.1.1)-ის, (2.1.11)-ის და (2.4.5)-ის გამოყენებით ვასკვნით

$$
\begin{aligned}
\|I\|^{1/2} &= \left\|\frac{M_{\alpha_k}}{n}\sigma_{M_{\alpha_k}}f\right\|_{1/2}^{1/2} \\
&\leq \left\|\sigma_{M_{\alpha_k}}f\right\|_{1/2}^{1/2} \leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.4.8}
$$

და

$$
\begin{aligned}
\|II_1\|^{1/2} &= \left\|\frac{n-M_{\alpha_k}}{n}S_{M_{\alpha_k}}f\right\|_{1/2}^{1/2} \\
&\leq \left\|S_{M_{\alpha_k}}f\right\|_{1/2}^{1/2} \leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.4.9}
$$

(2.4.7)-ის, (2.4.8)-ის და (2.4.9)-ის კომბინაციით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_n f\|_{1/2}^{1/2} &\geq \|II_2\|_{1/2}^{1/2}-\|II_1\|_{1/2}^{1/2}-\|I\|_{1/2}^{1/2} \\
&\geq c\lambda_k^{1/2}v\left(n-M_{\alpha_k}\right)-c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ზემოთ მოყვანილი შეფასებების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$
\begin{aligned}
& \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{1}{n\varphi_n}\sum_{k=1}^{n}\|\sigma_k f\|_{1/2}^{1/2} \qquad (2.4.10)\\
\geq\ & \frac{1}{M_{\alpha_k+1}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{\left\{M_{\alpha_k}\leq l\leq 2M_{\alpha_k}\right\}}\|\sigma_l f\|_{1/2}^{1/2}\\
\geq\ & \frac{c}{M_{\alpha_k+1}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{\left\{M_{\alpha_k}\leq l\leq 2M_{\alpha_k}\right\}}\left(\lambda_k^{1/2}v\left(l-M_{\alpha_k}\right)-c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}\right)\\
\geq\ & \frac{c\lambda_k^{1/2}}{M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{l=1}^{M_{\alpha_k}}v(l)\\
-\ & \frac{c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{\left\{M_{\alpha_k}\leq l\leq 2M_{\alpha_k}\right\}}1\\
\geq\ & \frac{c\lambda_k^{1/2}}{M_{\alpha_k}\varphi_{2M_{\alpha_k}}}\sum_{l=1}^{M_{\alpha_k}-1}v(l)-c\\
\geq\ & c\frac{\log^{1/2}M_{\alpha_k}}{\varphi_{2M_{\alpha_k}}^{1/2}}\to\infty,\ \text{როცა}\ \ k\to\infty.
\end{aligned}
$$

ამით დამტკიცება დასრულებულია.

■

2.5 ვილენკინ-ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების ნორმით კრებადობა ჰარდის მარტინგალურ სივრცეში

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია პერსონის, ტეფნაძის და თუთბერიძის [101] მიერ:

თეორემა 2.14. *ა) ვთქვათ $0<p<1/2,\ f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_{n_k}f\|_{H_p}\leq\frac{c_pM_{|n_k|}^{1/p-2}}{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}}\|f\|_{H_p}.$$

ბ) (სიზუსტე) ვთქვათ $0<p<1/2$ და Φ_n არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho(n_k)=\infty,\quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{M_{|n_k|}^{1/p-2}}{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\Phi_{n_k}}=\infty. \qquad (2.5.1)$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{n_k}f}{\Phi_{n_k}}\right\|_{weak-L_p}=\infty.$$

დამტკიცება. (1.2.10)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\left|\sigma_{n_k}a(x)\right|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}$$

არის შემოსაზღვრული L_∞-დან L_∞-ში. ლემა 1.4-ის გამოყენებით, თეორემის დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ

$$\int_{I_N}\left|\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\sigma_{n_k}a(x)}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\right|^p<c<\infty,$$

ყოველი a-ს p-ატომისთვის, სუპორტით I და $\mu(I)=M_N^{-1}$. ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია დავუშვათ რომ $I=I_N$. ადვილი სანახავია, რომ $\sigma_{n_k}(a)=0$, როცა $n_k\leq M_N$. ამიტომ, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $n_k>M_N$. რადგან $\|a\|_\infty\leq M_N^{1/p}$ მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\left|\sigma_{n_k}a(x)\right|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \\
\leq\ & \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\int_{I_N}|a(t)|\left|K_{n_k}(x-t)\right|d\mu(t) \\
\leq\ & \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\|a\|_\infty}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\int_{I_N}\left|K_{n_k}(x-t)\right|d\mu(t) \\
\leq\ & \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}M_N^{1/p}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\int_{I_N}\left|K_{n_k}(x-t)\right|d\mu(t) \\
\leq\ & M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}M_{|n_k|}^2\int_{I_N}\left|K_{n_k}(x-t)\right|d\mu(t).
\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $i<j$. ვთქვათ $x\in I_N^{i,j}$ და $j<\langle n_k\rangle$. მაშინ $t\in I_N$-სთვის $x-t\in I_N^{i,j}$ და (1.2.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left|K_{M_l}(x-t)\right|=0,\quad \text{ყოველი}\ \langle n_k\rangle\leq\ l\leq|n_k|. \tag{2.5.3}$$

(2.2.4)-ის, ლემა 2.3-ის, (2.5.2)-ის და (2.5.3)-ის გაერთიანებით, $x\in I_N^{i,j},\ 0\leq i<j<\langle n_k\rangle$-სთვის შეგვიძლია დავასკვნათ

$$\begin{aligned}
&\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\left|\sigma_{n_k}a(x)\right|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \\
\leq\ & M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}M_{|n_k|}^2\sum_{l=\langle n_k\rangle}^{|n_k|}\int_{I_N}\left|K_{M_l}(x-t)\right|d\mu(t)=0.
\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

ვთქვათ $x\in I_N^{i,j}$, სადაც $\langle n_k\rangle\leq j\leq N$. მაშინ, ლემა 2.4-ის თანახმად გვაქვს, რომ

$$\int_{I_N}\left|K_{n_k}(x-t)\right|d\mu(t)\leq\frac{cM_iM_j}{M_N^2}.$$

თუ კვლავ გამოვიყენებთ (2.5.2)-ს მივიღებთ

$$\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}\left|\sigma_{n_k}a(x)\right|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \tag{2.5.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_N^{1/p}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \int_{I_N} |K_{n_k}(x-t)| \, d\mu(t) \\
&\leq \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_N^{1/p}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \frac{M_i M_j}{M_N^2} \\
&\leq M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_i M_j .
\end{aligned}
$$

(1.1.1)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_N}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
= &\sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_{I_N^{i,j}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
+ &\sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_N^{k,N}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
\leq &\sum_{i=0}^{\langle n_k\rangle-1} \sum_{j=\langle n_k\rangle}^{N-1} \int_{I_N^{i,j}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
&+ \sum_{i=\langle n_k\rangle}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_{I_N^{i,j}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_N^{i,N}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
\leq &\sum_{i=0}^{\langle n_k\rangle-1} \sum_{j=\langle n_k\rangle}^{N-1} \int_{I_N^{i,j}} \left| M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_i M_j \right|^p d\mu \\
+ &\sum_{i=\langle n_k\rangle}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_{I_N^{i,j}} \left| M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_i M_j \right|^p d\mu \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_N^{i,N}} \left| M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} M_i M_N \right|^p d\mu
\end{aligned}
$$

მაშასადამე, (2.5.2)-(2.5.5)-ის კომბინაციით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_N}} \left| \frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2} |\sigma_{n_k} a(x)|}{M_{|n_k|}^{1/p-2}} \right|^p d\mu \\
\leq &\ c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p} \sum_{i=0}^{\langle n_k\rangle-1} \sum_{j=\langle n_k\rangle}^{N-1} \frac{(M_i M_j)^p}{M_j} \\
+ &\ c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p} \sum_{i=\langle n_k\rangle}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{(M_i M_j)^p}{M_j} \\
+ &\ c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p} \sum_{i=0} \frac{(M_i M_N)^p}{M_N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p}\sum_{i=0}^{\langle n_k\rangle} M_i^p \sum_{j=\langle n_k\rangle+1}^{N-1}\frac{1}{M_j^{1-p}} \\
&+ M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p}\sum_{i=\langle n_k\rangle}^{N-2} M_i^p \sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{1}{M_j^{1-p}} \\
&+c_p\sum_{i=0}^{N-1}\frac{M_i^p}{M_N^p} \\
&\leq c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p} M_{\langle n_k\rangle}^{p}\frac{1}{M_{\langle n_k\rangle}^{1-p}} \\
&+ c_p M_{\langle n_k\rangle}^{1-2p}\sum_{i=\langle n_k\rangle}^{N-2}\frac{1}{M_i^{1-2p}}+c_p\leq c_p<\infty.
\end{aligned}
$$

ამით თეორემის ა) ნაწილის დამტკიცება დასრულებულია.

ვთქვათ $\{n_k : k\geq 0\}$ არის დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.5.1) პირობას. მაშინ

$$
\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{M_{|n_k|}}{M_{\langle n_k\rangle}}=\infty. \tag{2.5.6}
$$

(2.5.6) პირობის გათვალისწინებით არსებობს $\{\alpha_k:\ k\geq 0\}\subset\{n_k:\ k\geq 0\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\alpha_0\geq 3$ და

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_{\langle\alpha_k\rangle}^{(1-2p)/2}\Phi_{\alpha_k}^{p/2}}{M_{|\alpha_k|}^{(1-2p)/2}}<c<\infty. \tag{2.5.7}
$$

დავუშვათ

$$
f^{(n)}=\sum_{\{k;\ |\alpha_k|<n\}}\lambda_k a_k,
$$

სადაც

$$
\lambda_k=\frac{\lambda M_{\langle\alpha_k\rangle}^{(1/p-2)/2}\Phi_{\alpha_k}^{1/2}}{M_{|\alpha_k|}^{(1/p-2)/2}}
$$

და

$$
a_k=\frac{M_{|\alpha_k|}^{1/p-1}}{\lambda}\left(D_{M_{|\alpha_k|+1}}-D_{M_{|\alpha_k|}}\right).
$$

ლემა1.3-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f\in H_p$.

ცხადია, რომ

$$
\widehat{f}(j)=\begin{cases}
M_{|\alpha_k|}^{1/2p}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{(1/p-2)/2}\Phi_{\alpha_k}^{1/2}, \\
\text{if }\ j\in\left\{M_{|\alpha_k|},...,\ \ M_{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k=0,1,2..., \\
0\ , \\
\ \text{if }\ j\notin\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{M_{|\alpha_k|},...,\ \ M_{|\alpha_k|+1}-1\right\}.
\end{cases} \tag{2.5.8}
$$

უფრო მეტიც,

$$
\frac{\sigma_{\alpha_k}f}{\Phi_{\alpha_k}}=\frac{1}{\alpha_k\Phi_{\alpha_k}}\sum_{j=1}^{M_{|\alpha_k|}}S_jf+\frac{1}{\alpha_k\Phi_{\alpha_k}}\sum_{j=M_{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k}S_jf\quad:=\quad I+II.
$$

ვთქვათ $M_{|\alpha_k|} < j \le \alpha_k$. მაშინ (2.5.8)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$S_j f = S_{M_{|\alpha_k|}} f + M_{|\alpha_k|}^{1/2p} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p-2)/2} \Phi_{\alpha_k}^{1/2} \left(D_j - D_{M_{|\alpha_k|}} \right). \tag{2.5.9}$$

(2.5.9)-ის გამოყენებით II შეგვიძლია გადავწეროთ, როგორც

$$\begin{aligned} II &= \frac{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}} S_{M_{|\alpha_k|}} f \\ &+ \frac{M_{|\alpha_k|}^{1/2p} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p-2)/2}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}^{1/2}} \sum_{j=M_{|\alpha_k|}}^{\alpha_k} \left(D_j - D_{M_{|\alpha_k|}} \right) \\ &:= II_1 + II_2. \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.1.1)-ს და (2.1.11)-ს, მაშინ ადვილი საჩვენებელია

$$\begin{aligned} \|II_1\|_{weak-L_p}^p &\le \left(\frac{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}} \right)^p \left\| S_{M_{|\alpha_k|}} f \right\|_{weak-L_p}^p \\ &\le \left(\frac{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}} \right)^p \left\| S_{M_{|\alpha_k|}} f \right\|_p^p \\ &\le c_p \|f\|_{H_p}^p < \infty. \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} \|I\|_{weak-L_p}^p &= \left(\frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}} \right)^p \left\| \sigma_{M_{|\alpha_k|}} f \right\|_{weak-L_p}^p \\ &\le \left(\frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}} \right)^p \left\| \sigma_{M_{|\alpha_k|}} f \right\|_p^p \\ &\le c_p \|f\|_{H_p}^p < \infty. \end{aligned}$$

ვთქვათ $x \in I_{\langle \alpha_k \rangle + 1}^{\langle \alpha_k \rangle - 1, \langle \alpha_k \rangle}$. (2.5.1) პირობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\langle \alpha_k \rangle \ne |\alpha_k|$ და $\left\langle \alpha_k - M_{|\alpha_k|} \right\rangle = \langle \alpha_k \rangle$. რადგან

$$D_{j+M_n} = D_{M_n} + \psi_{M_n} D_j = D_{M_n} + r_n D_j, \text{ როცა } \ j < M_n \tag{2.5.10}$$

თუ II_2-ის შეფასებისთვის გამოვიყენებთ ლემა 2.7-ს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} |II_2| &= \frac{M_{|\alpha_k|}^{1/2p} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p-2)/2}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}^{1/2}} \left| \sum_{j=1}^{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}} \left(D_{j+M_{|\alpha_k|}} - D_{M_{|\alpha_k|}} \right) \right| \\ &= \frac{M_{|\alpha_k|}^{1/2p} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p-2)/2}}{\alpha_k \Phi_{\alpha_k}^{1/2}} \left| \psi_{M_{|\alpha_k|}} \sum_{j=1}^{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}} D_j \right| \\ &\ge \frac{c_p M_{|\alpha_k|}^{1/2p-1} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p-2)/2}}{\Phi_{\alpha_k}^{1/2}} \left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|} \right) \left| K_{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}} \right| \\ &\ge \frac{c_p M_{|\alpha_k|}^{1/2p-1} M_{\langle \alpha_k \rangle}^{(1/p+2)/2}}{\Phi_{\alpha_k}^{1/2}}. \end{aligned}$$

აქედან,

$$
\begin{aligned}
& \|II_2\|^p_{weak-L_p} \\
\geq & \; c_p \left(\frac{M^{(1/p-2)/2}_{|\alpha_k|} M^{(1/p+2)/2}_{\langle\alpha_k\rangle}}{\Phi^{1/2}_{\alpha_k}} \right)^p \mu \left\{ x \in G_m : |IV_2| \geq c_p M^{(1/p-2)/2}_{|\alpha_k|} M^{(1/p+2)/2}_{\langle\alpha_k\rangle} \right\} \\
\geq & \; c_p \frac{M^{1/2-p}_{|\alpha_k|} M^{1/2+p}_{\langle\alpha_k\rangle} \mu \left\{ I^{\langle\alpha_k\rangle-1,\langle\alpha_k\rangle}_{\langle\alpha_k\rangle+1} \right\}}{\Phi^{p/2}_{\alpha_k}} \\
\geq & \; \frac{c_p M^{1/2-p}_{|\alpha_k|}}{M^{1/2-p}_{\langle\alpha_k\rangle} \Phi^{p/2}_{\alpha_k}}.
\end{aligned}
$$

საბოლოოდ, დიდი k-სთვის გვექნება

$$
\begin{aligned}
& \|\sigma_{\alpha_k} f\|^p_{weak-L_p} \\
\geq & \; \|II_2\|^p_{weak-L_p} - \|II_1\|^p_{weak-L_p} - \|I\|^p_{weak-L_p} \\
\geq & \; \frac{1}{2} \|II_2\|^p_{weak-L_p} \\
\geq & \; \frac{c_p M^{1/2-p}_{|\alpha_k|}}{2 M^{1/2-p}_{\langle\alpha_k\rangle} \Phi^{1/2}_{\alpha_k}} \to \infty, \text{ როცა } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

შედეგი 2.15. *ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p$. მაშინ არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_{n_k} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad k \in \mathbb{N}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho(n_k) < c < \infty$.

კერძო შემთხვევაში, ჩვენ ასევე ვიღებთ ვეისის [171], [173] მიერ მიღებულ შემდეგ თეორემას:

შედეგი 2.16. *დავუშვათ $0 < p < 1/2, \;\; f \in H_p$. მაშინ არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_{M_n} f\|_{H_p} \leq c_p \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

მეორეს მხრივ სამართლიანია შემდეგი შედეგი:

შედეგი 2.17. *ა) ვთქვათ $0 < p < 1/2, \;\; f \in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\|\sigma_{M_n+1} f\|_{H_p} \leq c_p M_n^{1/p-2} \|f\|_{H_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $\Phi(n)$ არის ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{M_k^{1/p-2}}{\Phi(k)} = \infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{M_k+1}f}{\Phi(k)}\right\|_{weak-L_p}=\infty.$$

შენიშვნა 2.18. *შედეგ 2.16-დან მივიღებთ, რომ σ_{M_n} არის შემოსაზღვრული H_p-დან H_p-ში, მაგრამ შედეგი 2.15-დან დავასკვნით, რომ σ_{M_n+1} არ არის შემოსაზღვრული H_p-დან H_p-ში. მთავარი მიზეზი ის არის, რომ $f \in H_p$ მარტინგალის ფურიეს კოეფიციენტები არ არიან ერთობლივ შემოსაზღვრულნი (დეტალებისთვის იხ. [144]).*

ჩვენ ასევე აღვნიშნავთ მიღებული შედეგის კერძო შემთხვევებს სხვადასხვა ქვემიმდევრობებისთვის, რათა დავინახოთ არსებითი განსხვავება განშლადობის რიგებს შორის:

შედეგი 2.19. *ა) ვთქვათ $0<p<1/2,\ \ f\in H_p$. მაშინ არსებობს მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\left\|\sigma_{M_n+M_{[n/2]}}f\right\|_{H_p}\le c_p\left(M_n/M_{[n/2]}\right)^{1/p-2}\|f\|_{H_p},\quad n\in\mathbb{N},$$

სადაც $[n/2]$ აღნიშნავს $n/2$-ის მთელ ნაწილს.

ბ) ვთქვათ $0<p<1/2$ და $\Phi(n)$ არის ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\left(M_k/M_{[k/2]}\right)^{1/p-2}}{\Phi(k)}=\infty.$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\frac{\sigma_{M_k+/M_{[k/2]}}f}{\Phi(k)}\right\|_{weak-L_p}=\infty.$$

ჩვენ ასევე ჩამოვაყალიბებთ 2.17 და 2.19 შედეგებს უოლშის სისტემისთვის რადგან უფრო ნათლად დავინახოთ განსხვავება განშლადობის რიგებს შორის განსხვავებული ქვემიმდევრობების შემთხვევაში:

შედეგი 2.20. *ა) ვთქვათ $0<p<1/2,\ \ f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ*

$$\left\|\sigma^w_{2^n+1}f\right\|_{H_p}\le c_p2^{(1/p-2)n}\|f\|_{H_p},\quad n\in\mathbb{N} \tag{2.5.11}$$

და

$$\left\|\sigma^w_{2^n+2^{[n/2]}}f\right\|_{H_p}\le c_p2^{\frac{(1/p-2)n}{2}}\|f\|_{H_p},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.5.12}$$

სადაც $[n/2]$ აღნიშნავს $n/2$-ის მთელ ნაწილს.

ბ)უფრო მეტიც, $2^{(1/p-2)n}$ და $2^{\frac{(1/p-2)n}{2}}$ მიმდევრობები (2.5.11) და (2.5.12) უტოლობებში არის განუზოგადებლები.

2.6 ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების ნორმით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები უწყვეტობის მოდულებითვის

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია თუთბერიძის [161] მიერ:

თეორემა 2.21. *ა) ვთქვათ* $0<p<1/2,\ f\in H_p,\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)=\infty$ *და*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{|n_k|},f\right)=o\left(\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\right),\ \text{როცა}\ \ k\to\infty. \tag{2.6.1}$$

მაშინ

$$\left\|\sigma_{n_k}f-f\right\|_{H_p}\to 0,\quad \text{როცა}\ \ k\to\infty. \tag{2.6.2}$$

ბ) ვთქვათ $\sup_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)=\infty$*. მაშინ არსებობს მარტინგალი* $f\in H_p(G_m)\ (0<p<1/2)$*, რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{|n_k|},f\right)=O\left(\frac{M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}}{M_{|n_k|}^{1/p-2}}\right),\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty \tag{2.6.3}$$

და

$$\left\|\sigma_{n_k}f-f\right\|_{weak-L_p}\nrightarrow 0,\ \ \text{როცა}\ \ k\to\infty. \tag{2.6.4}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $0<p<1/2,\ \ f\in H_p$ და $M_k<n\leq M_{k+1}$. თეორემა 2.14-ის ა) ნაწილის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნაათ, რომ

$$\begin{aligned}
&\left\|\sigma_n f-f\right\|_{H_p}^p\\
&\leq\left\|\sigma_n f-\sigma_n S_{M_k}f\right\|_{H_p}^p+\left\|\sigma_n S_{M_k}f-S_{M_k}f\right\|_{H_p}^p+\left\|S_{M_k}f-f\right\|_{H_p}^p\\
&=\left\|\sigma_n\left(S_{M_k}f-f\right)\right\|_{H_p}^p+\left\|S_{M_k}f-f\right\|_{H_p}^p+\left\|\sigma_n S_{M_k}f-S_{M_k}f\right\|_{H_p}^p\\
&\leq c_p\left(\frac{M_{|n|}^{1-2p}}{M_{\langle n\rangle}^{1-2p}}+1\right)\omega_{H_p}^p\left(1/M_n,f\right)+\left\|\sigma_n S_{M_k}f-S_{M_k}f\right\|_{H_p}^p.
\end{aligned}$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\sigma_n S_{M_N}f-S_{M_N}f\\
=&\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M_N}S_kS_{M_N}f+\frac{1}{n}\sum_{k=M_N+1}^{n}S_kS_{M_N}f-S_{M_N}f\\
=&\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M_N}S_kf+\frac{1}{n}\sum_{k=M_N+1}^{n}S_{M_N}f-S_{M_N}f\\
=&\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M_N}S_kf+\frac{n-M_N}{n}S_{M_N}f-S_{M_N}f\\
=&\ \frac{M_N}{n}\sigma_{M_N}f-\frac{M_N}{n}S_{M_N}f\\
=&\ \frac{M_N}{n}\left(S_{M_N}\sigma_{M_N}f-S_{M_N}f\right)\\
=&\ \frac{M_N}{n}S_{M_N}\left(\sigma_{M_N}f-f\right).
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

ვთქვათ $p > 0$. (2.1.1)-ის და (2.1.11)-ის კომბინაციით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\|\sigma_n S_{M_k} f - S_{M_k} f\|_{H_p}^p \tag{2.6.6}$$

$$\leq \frac{2^{M_k}}{n^p} \left\|S_{M_k}\left(\sigma_{M_k} f - f\right)\right\|_{H_p}^p \leq c_p \left\|\sigma_{M_k} f - f\right\|_{H_p}^p \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.$$

მეორეს მხრივ, (2.6.1) პირობით ასევე გვაქვს

$$c_p \left(\frac{M_{|n|}^{1-2p}}{M_{\langle n \rangle}^{1-2p}} + 1\right) \omega_{H_p}^p \left(1/M_n, f\right) \to 0, \ \ \text{როცა} \ \ n \to \infty. \tag{2.6.7}$$

(2.6.6)-ის და (2.6.7)-ის კომბინაციით მივიღებთ თეორემის პირველი ნაწილის დამტკიცებას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. მას შემდეგ რაც $\sup_{k\in\mathbb{N}} \rho\left(n_k\right) = \infty$, ჩვენ დავასკვნით, რომ როცა $0 < p < 1/2$ მაშინ არსებობს ქვემიმდევრობა $\{s_k : k \geq 1\} \subset \{n_k : k \geq 1\}$ ისეთი რომ $\lim_{k\to\infty} \rho(s_k) = \infty$ და

$$\frac{M_{\langle s_k \rangle}^{1/p-2}}{M_{|s_k|}^{1/p-2}} = \frac{1}{\left(m_{\langle s_k \rangle} \ldots m_{|s_k|-1}\right)^{1/p-2}} \leq \frac{1}{2^{\rho(s_k)(1/p-2)}} \to 0, \ \ \text{როცა} \ \ k \to \infty.$$

სიადანაც მივიღებთ, რომ არსებობს ქვემიმდევრობა $\{\alpha_k : k \geq 1\} \subset \{s_k : k \geq 1\}$ ისეთი, რომ $|\alpha_0| \neq \langle \alpha_0 \rangle$, $\rho\left(\alpha_k\right)$ არის ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს $\lim_{k\to\infty} \rho\left(\alpha_k\right) = \infty$ და

$$\frac{M_{\langle \alpha_k \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_k|}^{1/p-2}} \leq \left(\frac{M_{\langle \alpha_{k-1} \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_{k-1}|}^{1/p-2}}\right)^2 \quad \text{სადაც} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.6.8}$$

უტოლობა (2.6.8)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{M_{\langle \alpha_k \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_k|}^{1/p-2}} \leq \left(\frac{M_{\langle \alpha_{k-1} \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_{k-1}|}^{1/p-2}}\right)^2 \leq \ldots \leq \left(\frac{M_{\langle \alpha_0 \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_0|}^{1/p-2}}\right)^{k+1} \leq \frac{1}{2^{(k+1)(|\alpha_0| - \langle \alpha_0 \rangle)(1/p-2)}}$$

და

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{M_{\langle \alpha_k \rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_k|}^{1/p-2}}\right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+1)(|\alpha_0| - \langle \alpha_0 \rangle)(1-2p)}} < c < \infty. \tag{2.6.9}$$

ვთქვათ $\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}} m_k$ და ავღნიშნოთ $f = \left(f^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ სადაც

$$f^{(n)} = \sum_{\{i:\, |\alpha_i| < n\}} \frac{\lambda M_{\langle \alpha_i \rangle}^{(1/p-2)}}{M_{|\alpha_i|}^{(1/p-2)}} a_i^{(p)}, \qquad a_k^{(p)} := \frac{M_{|\alpha_k|}^{1/p-1}}{\lambda} \left(D_{M_{|\alpha_k|+1}} - D_{M_{|\alpha_k|}}\right)$$

მას შემდეგ რაც $a_i^{(p)}(x)$ არის p-ატომი, თუ გამოვიყენებთ ტოლობა (1.7.3) ჩვენ დავადგენთ

$$\left(f - S_{M_{|\alpha_n|}} f\right)_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \ldots, |\alpha_n|, \\ f^{(k)} - f^{(|\alpha_n|)}, & k \geq |\alpha_n| + 1, \end{cases}$$

და

$$f-S_{M_{|\alpha_n|}}f=\left(0,...,0,\sum_{i=n}^{n+s}\frac{M_{\langle\alpha_i\rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_i|}^{1/p-2}}a_i^{(p)},...\right),\quad s\in\mathbb{N}_+$$

არის მარტინგალი. მეორეს მხრივ, რადგან $\rho(\alpha_n)$ არის ზრდადი და $d(\alpha_0)\neq 0$ ჩვენ მივიღებთ, რომ $\rho(\alpha_n)\neq 0$ ნებისმიერი $n\in\mathbb{N}_+$-თვის. აქედან თუ გამოვიყენებთ (2.6.8) და ლემა 1.3 მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\omega_{H_p}(1/M_{|\alpha_n|},f)=\|f-S_{M_{|\alpha_n|}}f\|_{H_p}\\ \leq\ &\sum_{i=n}^{\infty}\frac{M_{\langle\alpha_i\rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_i|}^{1/p-2}}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{M_{\langle\alpha_n\rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_n|}^{1/p-2}}\right)^i=O\left(\frac{M_{\langle\alpha_n\rangle}^{1/p-2}}{M_{|\alpha_n|}^{1/p-2}}\right),\ \text{როცა}\ n\to\infty.\end{aligned}$$

ადვილი სანახავია

$$\widehat{f}(j)=\begin{cases}M_{|\alpha_k|}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2}, & j\in\left\{M_{|\alpha_k|},...,M_{|\alpha_k|+1}-1\right\},\ k=0,1,...\\ 0\,, & j\notin\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\left\{M_{|\alpha_k|},...,M_{|\alpha_k|+1}-1\right\}.\end{cases}\tag{2.6.10}$$

ვთქვათ $M_{|\alpha_k|}<j<\alpha_k$. თუ გამოვიყენებთ (2.6.10)-ს მივიღებთ

$$S_jf=S_{M_{|\alpha_k|}}f+\sum_{v=M_{|\alpha_k|}}^{j-1}\widehat{f}(v)w_v=S_{M_{|\alpha_k|}}f+M_{|\alpha_k|}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2}\left(D_j-D_{M_{|\alpha_k|}}\right).$$

აქედან

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha_k}f&=\frac{1}{\alpha_k}\sum_{j=1}^{M_{|\alpha_k|}}S_jf+\frac{1}{\alpha_k}\sum_{j=M_{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k}S_jf\\ &=\frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\sigma_{M_{|\alpha_k|}}f+\frac{\left(\alpha_k-M_{|\alpha_k|}\right)S_{M_{|\alpha_k|}}f}{\alpha_k}\\ &+\frac{M_{|\alpha_k|}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2)}}{\alpha_k}\sum_{j=M_{|\alpha_k|}+1}^{\alpha_k}\left(D_j-D_{M_{|\alpha_k|}}\right)=I+II+III.\end{aligned}\tag{2.6.11}$$

მას შემდეგ რაც $D_{j+M_n}=D_{M_n}+\psi_{M_n}D_j$, როცა $j<M_{n+1}$ ჩვენ დავასკვნით

$$\begin{aligned}|III|&=\frac{M_{|\alpha_k|}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2}}{\alpha_k}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_k-M_{|\alpha_k|}}\left(D_{j+M_{|\alpha_k|}}-D_{M_{|\alpha_k|}}\right)\right|\\ &=\frac{M_{|\alpha_k|}M_{\langle n_k\rangle}^{1/p-2}}{\alpha_k}\left|\sum_{j=1}^{\alpha_k-M_{|\alpha_k|}}D_j\right|\\ &=\frac{M_{|\alpha_k|}M_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2}}{\alpha_k}\left(\alpha_k-M_{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k-M_{|\alpha_k|}}\right|\\ &\geq cM_{\langle\alpha_k\rangle}^{1/p-2}\left(\alpha_k-M_{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k-M_{|\alpha_k|}}\right|.\end{aligned}\tag{2.6.12}$$

(2.6.11)-ის და (2.6.12)-ის გაერთიანებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
& \|\sigma_{\alpha_k} f - f\|^p_{weak-L_p} = \|I + II + III - f\|^p_{weak-L_p} \\
= \ & \|III + \frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\sigma_{M_{|\alpha_k|}} f + \frac{\left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|}\right) S_{M_{|\alpha_k|}} f}{\alpha_k} - f\|^p_{weak-L_p} \\
= \ & \|III + \frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\left(\sigma_{M_{|\alpha_k|}} f - f\right) + \frac{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\left(S_{M_{|\alpha_k|}} f - f\right)\|^p_{weak-L_p} \\
\geq \ & \|III\|^p_{weak-L_p} - \left(\frac{M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|\sigma_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p} \\
- \ & \left(\frac{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}{\alpha_k}\right)^p \|S_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p} \\
\geq \ & \|III\|^p_{weak-L_p} - \|\sigma_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p} - \|S_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p}.
\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.1.5)-ს და (2.1.10)-ს დაუყოვნებლივ მივიღებთ

$$\|S_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p} \to 0, \qquad \|\sigma_{M_{|\alpha_k|}} f - f\|^p_{weak-L_p} \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty,$$

და

$$\|\sigma_{\alpha_k} f - f\|^p_{weak-L_p} \geq \|III\|^p_{weak-L_p} - o(1), \quad \text{როცა} \quad k \to \infty.$$

ვთავათ $x \in I_{\langle\alpha_k\rangle+1}\left(e_{\langle\alpha_k\rangle-1} + e_{\langle\alpha_k\rangle}\right)$. მაშინ ლემა 2.7 მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \mu\left\{x \in G_m : \left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}\right| \geq c M^2_{\langle\alpha_k\rangle}\right\} \\
\geq \ & \mu\left(I_{\langle\alpha_k\rangle+1}\left(e_{\langle\alpha_k\rangle-1} + e_{\langle\alpha_k\rangle}\right)\right) \geq \frac{c}{M_{\langle\alpha_k\rangle}},
\end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned}
& \|\left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}\|^p_{weak-L_p} \\
\geq \ & c M^{2p}_{\langle\alpha_k\rangle}\mu\left\{x \in G_m : \left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|}\right)\left|K_{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}\right| \geq c M^2_{\langle\alpha_k\rangle}\right\} \\
\geq \ & c M^{2p}_{\langle\alpha_k\rangle}\frac{1}{M_{\langle\alpha_k\rangle}} = c M^{2p-1}_{\langle\alpha_k\rangle}.
\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\|III\|^p_{weak-L_p} \geq M^{1-2p}_{\langle\alpha_k\rangle}\|\left(\alpha_k - M_{|\alpha_k|}\right) K_{\alpha_k - M_{|\alpha_k|}}\|^p_{weak-L_p} \geq c > 0.$$

აქედან, საკმარისად დიდი k-თვის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|\sigma_{\alpha_k} f - f\|^p_{weak-L_p} \geq \|III\|^p_{weak-L_p} - o(1) \geq \frac{1}{2}\|III\|^p_{weak-L_p} > \frac{c}{2} \nrightarrow 0, \ \text{როცა} \ k \to \infty$$

თეორემა დამტკიცებულია.

■

მეორეს მხრივ, ასევე მიიღება შემდეგი საინტერესო ახალი შედეგი:

შედეგი 2.22. *ა) ვთქვათ* $0<p<1/2,\ f\in H_p$ *და*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{n_k},f\right)=o\left(\frac{1}{M_{n_k}^{1/p-2}}\right),\text{ როცა }\ k\to\infty.$$

მაშინ

$$\left\|\sigma_{M_{n_k}+1}f-f\right\|_{H_p}\to 0,\quad \text{როცა }\ k\to\infty.$$

ბ) ვთქვათ $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)=\infty$. *მაშინ არსებობს მარტინგალი* $f\in H_p(G)\ (0<p<1/2)$, *რომლის-თვისაც*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{|n_k|},f\right)=O\left(\frac{1}{M_{n_k}^{1/p-2}}\right),\ \text{ როცა }\ k\to\infty$$

და

$$\left\|\sigma_{M_{n_k}+1}f-f\right\|_{weak-L_p}\nrightarrow 0,\ \text{ როცა }\ k\to\infty.$$

შედეგი 2.23. *ა) ვთქვათ* $0<p<1/2,\ f\in H_p$ *და*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{n_k},f\right)=o\left(\frac{M_{[n_k/2]}^{1/p-2}}{M_{n_k}^{1/p-2}}\right),\text{ როცა }\ k\to\infty.$$

ფინმა

$$\left\|\sigma_{M_{n_k}+M_{[n_k/2]}}f-f\right\|_{H_p}\to 0,\quad \text{როცა }\ k\to\infty.$$

ბ) ვთქვათ $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\rho\left(n_k\right)=\infty$. *მაშინ არსებობს მარტინგალი* $f\in H_p(G_m)\ (0<p<1/2)$, *რომლის-თვისაც*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_{|n_k|},f\right)=O\left(\frac{M_{[n_k/2]}^{1/p-2}}{M_{n_k}^{1/p-2}}\right),$$

და

$$\left\|\sigma_{M_{n_k}+M_{[n_k/2]}}f-f\right\|_{weak-L_p}\nrightarrow 0,\ \text{ როცა }\ k\to\infty.$$

მიღებულ შედეგებს ჩვენ ასევე ჩამოვაყალიბებთ უოლშის სისტემისთვის რათა უფრო ცხადად დავინახოთ არსებული განსხვავებები სხვადასხვა ქვემიმდევრობის შემთხვევაში:

შედეგი 2.24. *ა) ვთქვათ* $0<p<1/2,\ f\in H_p$ *და*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^n,f\right)=o\left(\frac{1}{2^{n(1/p-2)}}\right),\text{ როცა }\ n\to\infty.$$

მაშინ

$$\left\|\sigma^w_{2^n+1}f-f\right\|_{H_p}\to 0,\quad \text{როცა }\ n\to\infty.$$

ბ) არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G_m)\ (0<p<1/2)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^n,f\right)=O\left(\frac{1}{2^{n(1/p-2)}}\right),\ \text{ როცა }\ n\to\infty$$

და

$$\left\|\sigma_{2^n+1}^w f - f\right\|_{weak-L_p} \nrightarrow 0, \text{ როცა } k \to \infty.$$

შედეგი 2.25. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1/2, \ f \in H_p$ *და*

$$\omega_{H_p}\left(1/2^n, f\right) = o\left(\frac{1}{2^{n(1/p-2)/2}}\right), \text{ როცა } n \to \infty.$$

მაშინ

$$\left\|\sigma_{2^n+2^{[n/2]}}^w f - f\right\|_{H_p} \to 0, \quad \text{როცა } n \to \infty,$$

სადაც $[n/2]$ *აღნიშნავს* $n/2$*-ის მთელ ნაწილს.*

ბ) არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m)$ $(0 < p < 1/2)$, *რომლისთვისაც*

$$\omega_{H_p}\left(1/M_n, f\right) = O\left(\frac{1}{2^{n(1/p-2)/2}}\right), \text{ როცა } n \to \infty.$$

და

$$\left\|\sigma_{2^n+2^{[n/2]}}^w f - f\right\|_{weak-L_p} \nrightarrow 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

3 ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების T საშუალოები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში

3.1 T საშუალოების ზოგიერთი კლასიკური შედეგები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივებისთვის

ლიტერატურაში ცნობილი T საშუალოები წარმოადგენენ ფეიერის, და რისის ლოგარითმული საშუალოების განზოგადებას. T შეჯამება არის საკმაოდ ზოგადი შეჯამებადობის მეთოდი და ამიტომ მათი შესწავლა უფრო საინტერესოა ნებისმიერი ორთოგონალური მწკრივის მიმართ.

რადგან T საშუალოები არიან ნორლუნდის საშუალოების შებრუნებულნი, ამიტომ ჩვენ შევისწავლით რამდენიმე საინტერესო შედეგს ნორლუნდის შეჯამებადობის შესახებ, რაც დიდ გავლენას ახდენს ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების T საშუალების ახალ შედეგებზეც.

[47]-ში გოგინავამ დეტალურად შეისწავლა უოლშ-ფურიეს მწკრივის ჩეზაროს საშუალოები. ორგანზომილებიან შემთხვევაში ნოჯიმ განიხილა ნორლუნდისა და ჩეზაროს საშუალებების აპროქსიმაციის თვისებები (იხ. [82], [83] და [85]). ვილენკინის სისტემების მიმართ (C,α) საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{\alpha,*}$ $(0<\alpha<1)$ შესწავლილ იქნა ვეისის მიერ [177]-ში. ამ ნაშრომში მან დაამტკიცა, რომ $\sigma^{\alpha,*}$ არის შემოსაზღვრილი H_p მარტინგალური ჰარდის სივრციდან L_p ლებეგის სივრცეში, როცა $p>1/(1+\alpha)$. გოგინავამ [45]-ში ააგო კონტრმაგალითი რომელიც აჩვენებს, რომ შემოსაზღვრულობას არ აქვს ადგილი, როცა $0<p\leq 1/(1+\alpha)$. ვეისმა და შიმონმა [122] აჩვენეს, რომ მაქსიმალური ოპერატორი $\sigma^{\alpha,*}$ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/(1+\alpha)}$ სივრციდან $weak-L_{1/(1+\alpha)}$ სივრცეში.

ვილენკინის სისტემის (C,α) საშუალოების ძლიერად შეჯამენადობის თეორემები და ჰარდის ტიპის უტოლობები, ასევე მათი წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა, როცა $0<p\leq 1/(1+\alpha)$ განხილული იქნა [18]-ში ბლახოტას და ტეფნაძის მიერ და ასევე [19]-ში ბლახოტა, ტეფნაძე და ტოლედოს მიერ. შეჯამებადობის ზოგიერთი უფრო ზოგადი მეთოდი განხილული იქნა [15]-ში ბლახოტა, ნოჯის და ტეფნაძის მიერ.

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [104] (იხ. ასევე [144]) განიხილეს ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი (იხ. (1.4.1)). კერძოდ, არაკლებადი $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობის მიერ წარმოქმნილი (1.4.1) შეჯამებადობის მეთოდის მაქსიმალური ოპერატორი t^* არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, ნებისმიერი $0<p<1/2$-სთვის და ნებისმიერი არაკლებადი $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც სამართლიანია პირობა

$$\frac{q_0}{Q_n}\geq\frac{c}{n},\quad (c>0)\,, \tag{3.1.1}$$

არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|t_n f\|_{weak-L_p}=\infty.$$

პერსონის, ტეფნაძის და ვალის მიერ [103]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ $0<p<1/2$ და მიმდევ-

რობა $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაკლებადი, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{t}^{*}_{p,1} f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|t_n f|}{(n+1)^{1/p-2}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

მეორეს მხრივ, რადგან ფეიერის საშუალოები არიან არაკლებადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი ნორლუნდის საშუალოების კერძო მაგალითი დაუყოვნებლივ ვიღებთ, რომ შემდეგი მიმდევრობის

$$\left\{1/\left(k+1\right)^{1/p-2} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

განშლადობის რიგი უსასრულობაში არის განუზოგადებელი.

არაკლებადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი ნორლუნდის საშუალოს მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{t}{}^{*}_{1} f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|t_n f|}{\log^2\left(n+1\right)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან ლებეგის $L_{1/2}$ სივრცეში. მეორეს მხრივ, თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ ფეიერის საშუალოები არიან არაკლებადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი ნორლუნდის საშუალოების მაგალითები, ჩვენ დაუყუვნებლივ დავასკვნით, რომ წონების

$$\left\{1/\log^2\left(n+1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

რიგის ასიმპტოტური ქცევა უსასრულობაში არის განუზოგადებელი.

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [104]-ში დაამტკიცეს, რომ არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობებისთვის მქონე ყოველი ნორლუნდის საშუალოსთვის არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_n f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $0 < p < 1/2$-სთვის და ნორლუნდის t_n საშუალოებისთვის არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევროებით მაქსიმალური ოპერატორი t^* არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p მარტინგალური სივრციდან $weak-L_p$ სივრცეში, არამედ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t^* f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [104]-ში იპოვეს არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობებით განსაზღვრული ნორლუნდის საშუელოების მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვულობის საკმარისი პირობა, როცა $1/2 \le p < 1$. კერძოდ, $0 < p < 1/\left(1+\alpha\right)$-სთვის, სადაც $0 < \alpha \le 1$ და არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^\alpha}{Q_n} = c > 0,\ 0 < \alpha \le 1, \tag{3.1.2}$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_n f\|_{weak-L_p} = \infty. \tag{3.1.3}$$

უფრო მეტიც, ნებისმიერი არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^\alpha}{Q_n} = \infty, \quad (0 < \alpha \le 1), \tag{3.1.4}$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/(1+\alpha)}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_n f\|_{weak-L_{1/(1+\alpha)}} = \infty. \tag{3.1.5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ნებისმიერი $0 < p < 1/(1+\alpha)$-სთვის, სადაც $0 < \alpha \le 1$ და არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც სამართლიანია (3.1.2) პირობა, არსებობს $f \in H_p$ მარტინგალი ისეთი, რომ

$$\|t^* f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.4) პირობას, არსებობს მარტინგალია $f \in H_{1/(1+\alpha)}$ ისეთი, რომ

$$\|t^* f\|_{weak-L_{1/(1+\alpha)}} = \infty.$$

[79]-ში დამტკიცდა, რომ არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით განსაზღვრული ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი t^*, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\frac{1}{Q_n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \text{როცა} \quad n \to \infty \tag{3.1.6}$$

და

$$q_n - q_{n+1} = O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right), \quad \text{როცა} \quad n \to \infty, \tag{3.1.7}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/(1+\alpha)}$ სივრციდან $weak - L_{1/(1+\alpha)}$ სივრცეში $0 < \alpha \le 1$-სთვის.

უფრო მეტიც, თუ $0 < \alpha \le 1$ და არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობებს

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^\alpha}{Q_n} \ge c_\alpha > 0 \tag{3.1.8}$$

და

$$|q_n - q_{n+1}| \ge c_\alpha n^{\alpha-2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1.9}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/(1+\alpha)}$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|t_nf\|_{1/(1+\alpha)}=\infty.$$

[104]-ში (იხ. ასევე [17]) დამტკიცდა რომ, თუ $f\in H_p$, სადაც $0<p<1/(1+\alpha)$ $0<\alpha\leq 1$-სთვის და $\{q_k:k\in\mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს (3.1.6)-ს და (3.1.7)-ს, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{t}{}^{*}_{p,\alpha}:=\frac{|t_nf|}{(n+1)^{1/p-1-\alpha}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

უფრო მეტიც, ვთქვათ $\{\Phi_n:n\in\mathbb{N}_+\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(n+1)^{1/p-1-\alpha}}{\Phi_n}=+\infty, \tag{3.1.10}$$

მაშინ არსებობს ნორლუნდის საშუალო, არაზრდადი $\{q_k:k\in\mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.8) და (3.1.9) პირობებს ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left\|\frac{t_{M_{2n_k}+1}f_k}{\Phi_{M_{2n_k}+1}}\right\|_{weal-L_p}}{\|f_k\|_{H_p}}=\infty.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $0<p<1/(1+\alpha)$ და $f\in H_p$, მაშინ არსებობს მხოლოდ p-ზე და α-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი $c_{p,\alpha}$ ისეთი, რომ

$$\|t_nf\|_p\leq c_{p,\alpha}(n+1)^{1/p-1-\alpha}\|f\|_{H_p},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

მეორეს მხრივ, თუ $\{\Phi_n:n\in\mathbb{N}\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (3.1.10), მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{t_nf}{\Phi_n}\right\|_{weak-L_p}=\infty.$$

უფრო მეტიც, თუ $\{\Phi_n:n\in\mathbb{N}\}$ არის ნებისმიერი არაკლებადი მიმდევრობა რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.10) პირობას, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|t_nf|}{\Phi_n}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან $weak-L_p$ სივრცეში.

[20]-ში (იხ. ასევე [17]) დამტკიცებულია, რომ თუ $f\in H_{1/(1+\alpha)}$, სადაც $0<\alpha\leq 1$ და $\{q_k:k\in\mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.6) და (3.1.7) პირობებს, მაშინ არსებობს α-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_α ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{t}{}^{*}_{\alpha}:=\frac{|t_nf|}{\log^{1+\alpha}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალური $H_{1/(1+\alpha)}$ სივრციდან $L_{1/(1+\alpha)}$ ლებეგის სივრცეში. უფრო მეტიც, თუ $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}_+\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^{1+\alpha}(n+1)}{\Phi_n} = +\infty, \tag{3.1.11}$$

მაშინ არსებობს ნორლუნდის საშუალებები, არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.8) და (3.1.9) პირობებს ისეთი, რომ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left\|\sup_n \left|\frac{t_n f_k}{\Phi_n}\right|\right\|_{1/(1+\alpha)}}{\|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}} = \infty.$$

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [103]-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $0 < p < 1/2$, $f \in H_p$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი, მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|t_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \le c_p \|f\|_{H_p}^p .$$

მეორეს მხრივ, იმის გამო, რომ ფეიერის საშუალებები არის ნორლუნდის საშუალებების მაგალითები არაკლებადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, დაუყოვნებლივ მივიღებთ რომ

$$\left\{1/k^{2-2p} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

განშლადობის რიგი არის განუზოგადებელი.

პერსონმა, ტეფნაძემ და ვალმა [103]-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $f \in H_{1/2}$ და მიმდევრობა $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაკლებადი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) პირობას, მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|t_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k} \le c \|f\|_{H_{1/2}}^{1/2} .$$

ბლახოტა და ტეფნაძემ [17]-ში შეისწავლეს ნორლუნდის საშუალოები არაზრდადი $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობით, როცა $0 < p < 1/(1+\alpha)$, სადაც $0 < \alpha < 1$. კერძოდ, თუ $f \in H_p$, სადაც $0 < p < 1/(1+\alpha)$, $0 < \alpha \le 1$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$, იყოს არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.6) და (3.1.7) პირობებს, მაშინ არსებობს მხოლოდ α-ზე და p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმიცა $c_{\alpha,p}$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|t_k f\|_{H_p}^p}{k^{2-(1+\alpha)p}} \le c_{\alpha,p} \|f\|_{H_p}^p .$$

ბლახოტამ, პერსონმა და ტეფნაძემ [20]-ში დაამტკიცეს, რომ თუ $f \in H_{1/(1+\alpha)}$ სადაც $0 < \alpha \le 1$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.6) და (3.1.7) პირობებს, მაშინ არსებობს მხოლოდ α-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმიცა c_α ისეთი, რომ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|t_m f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}}{m}\leq c_\alpha \|f\|_{H_{1/(1+\alpha)}}^{1/(1+\alpha)}.$$

[162]-ში შევისწავლეთ არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით განსაზღვრული ნორლუნდის საშუალოების მაქსიმალური T^* ოპერატორები, და დავამტკიცეთ, რომ ყოველი ასეთი მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, ნებისმიერი $0<p<1/2$ და არაზრდადი $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{q_{n+1}}{Q_{n+2}}\geq\frac{c}{n},\quad (c\geq 1).$$

არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n f\|_{weak-L_p}=\infty.$$

ჩვენ ასევე დავამტკიცეთ, რომ მაქსიმალური ოპერატორი T^* აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას (1.4.3) შეჯამებადობის მეთოდის არაკლებადი $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობით

$$\frac{q_{n-1}}{Q_n}=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \text{როცა}\quad n\to\infty, \tag{3.1.12}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, თუ $0<p<1/2$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n f\|_{weak-L_p}=\infty.$$

T საშუალოების შესახებ წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა და ძლიერად კრებადობის თეორემების დამტკიცება პირველადაა მოყვანილი ამ თეზისში, მაგრამ ის ასევე დამტიცებულია დასაბეჭდად გაგზავნილ სტატიაში თუთბერიძე [163]. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ $0<p\leq 1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\frac{1}{Q_n}=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad \text{როცა}\quad n\to\infty, \tag{3.1.13}$$

მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{T}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \tag{3.1.14}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

მეორეს მხრივ, თუ $0<p\leq 1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, მაშინ T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{T}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \tag{3.1.15}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

ვინაიდან მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{\sigma}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის მარტინგალურ H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში, ფეიერის საშუალოები არის T საშუალოების მაგალითი არაზრდადი და არაკლებადი მიმდევრობებით და მნიშვნელის $(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}$ ხარისხი არის ზუსტი ფეიერის საშუალოების შემთხვევაში, მაშინ მივიღებთ, რომ ეს წონები ასევე არიან ზუსტი (3.1.15)-ში და (3.1.14)-ში.

[163]-ში ჩვენ ასევე შევისწავლეთ ვილენკინის სისტემის მიმართ T საშუალოების H_p ნორმებისთვის ჰარდის ტიპის უტოლობები. კერძოდ, თუ $0<p<1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაკლებადი ან არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, მაშინ არსობობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ უტოლობა

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|T_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p$$

არის სამართლიანი.

უფრო მეტიც, თუ $f\in H_{1/2}$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) პირობას, მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|T_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k} \leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}. \tag{3.1.16}$$

თუ $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას მაშინაც სამართლიანია (3.1.16) უტოლობა ნებისმიერი $f\in H_{1/2}$.

3.2 დამხმარე ლემები

შემდეგი ტოლობები მოყვანილია თუთბერიძის [162] (იხ. აგრევე [163]) მიერ:

ლემა 3.1. *დავუშვათ $n\in\mathbb{N}$. მაშინ*

$$Q_n := \sum_{j=0}^{n-1} q_j = \sum_{j=0}^{n-2}(q_j - q_{j+1})\, j + q_{n-1}(n-1) + q_0 \tag{3.2.1}$$

$$F_n = \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}(q_j - q_{j+1})\, jK_j + q_{n-1}(n-1)K_{n-1}\right). \tag{3.2.2}$$

$$t_n = \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}(q_j - q_{j+1})\, j\sigma_j + q_{n-1}(n-1)\sigma_{n-1}\right). \tag{3.2.3}$$

დამტკიცება. თუ ჩვენ გამოვიყენებთ აბელის გარდაქმნას დაუყოვნებლივ მივიღებთ, (3.2.1), (3.2.2) და (3.2.3) ტოლობების სამართლიანობას. დამტკიცება დასრულებულია. ■

3.2-3.10 ლემების დამტკიცება პირველადაა მოყვანილი ამ თეზისში, მაგრამ ის ასევე დამტიცებულია დასაბეჭდად გაგზავნილ სტატიაში თუთბერიძე [163].

ლემა 3.2. *დავუშვათ $n \in \mathbb{N}$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა ან არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.1.12) *პირობას, მაშინ*

$$\|F_n\|_1 < c < \infty. \tag{3.2.4}$$

დამტკიცება. დავუშვათ $n \in \mathbb{N}$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა. (1.2.10)-ის, (3.2.1)-ის და (3.2.3)-ის კომბინაციით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\begin{aligned}
\|T_n f\|_1 &\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}|q_j - q_{j+1}|\, j\|\sigma_j f\|_1 + q_{n-1}(n-1)\|\sigma_{n-1} f\|_1\right)\\
&\leq \frac{c}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}(q_j - q_{j+1})\, j + q_{n-1}(n-1)\right) \leq c < \infty.
\end{aligned}$$

ვთქვათ, $n \in \mathbb{N}$ და $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაკლებადი ფუნქციების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას. მაშინ, თუ ისევ გამოვიყენებით (1.2.10)-ს (3.2.1)-სთან და (3.2.3)-სთან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
\|T_n f\|_1 &\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}|q_j - q_{j+1}|\, j\|\sigma_j f\|_1 + q_{n-1}(n-1)\|\sigma_{n-1} f\|_1\right)\\
&\leq \frac{c}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}(q_{j+1} - q_j)\, j + q_{n-1}(n-1)\right)\\
&= \frac{c}{Q_n}\left(2q_{n-1}(n-1) - \left(\sum_{j=0}^{n-2}(q_j - q_{j+1})\, j + q_{n-1}(n-1)\right)\right)\\
&= \frac{c}{Q_n}(2q_{n-1}(n-1) - Q_n) \leq c < \infty.
\end{aligned}$$

თეორემა დასრულებულია. ■

ლემა 3.3. *ვთქვათ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა და $n > M_N$. მაშინ*

$$\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j(x)\right| \leq \frac{c}{M_N}\left\{\sum_{j=0}^{|n|} M_j \left|K_{M_j}\right|\right\},$$

სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი.

დამტკიცება. ვინაიდან მიმდევრობა არის არაზრდადი რიცხვების, ამიტომ მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Q_n}\left(q_{M_N}+\sum_{j=M_N}^{n-2}\left|q_j-q_{j+1}\right|+q_{n-1}\right) \\
\leq\; & \frac{1}{Q_n}\left(q_{M_N}+\sum_{j=M_N}^{n-2}\left(q_j-q_{j+1}\right)+q_{n-1}\right) \\
\leq\; & \frac{2q_{M_N}}{Q_n}\leq\frac{2q_{M_N}}{Q_{M_N+1}}\leq\frac{c}{M_N}.
\end{aligned}$$

თუ მივმართავთ აბელის გარდაქმნას და გამოვიყენებთ ლემა 3.1-ის (3.2.1) და (3.2.2) ტოლობებს მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j(x)\right| \\
=\; & \frac{1}{Q_n}\left(q_{M_n}K_{M_n-1}+\sum_{j=M_N}^{n-2}\left(q_j-q_{j+1}\right)K_j+q_{n-1}K_{n-1}\right) \\
\leq\; & \frac{1}{Q_n}\left(q_{M_n}+\sum_{j=M_N}^{n-2}\left|q_j-q_{j+1}\right|+q_{n-1}\right)\sum_{i=0}^{|n|}M_i\left|K_{M_i}\right| \\
\leq\; & \frac{c}{M_N}\sum_{i=0}^{|n|}M_i\left|K_{M_i}\right|.
\end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

■

ლემა 3.4. *ვთქვათ* $x\in I_N^{k,l},\quad k=0,\ldots,N-1,\quad l=k+1,\ldots,N$ *და* $\{q_k:k\in\mathbb{N}\}$ *არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ*

$$\int_{I_N}\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j(x-t)\right|d\mu(t)\leq\frac{cM_lM_k}{M_N^2}.$$

აქ c არის აბსოლუტური მუდმივი.

დამტკიცება. დავუშვათ $x\in I_N^{k,l}$, სადაც $0\leq k<l\leq N-1$ და $t\in I_N$. მას შემდეგ რაც $x-t\in I_N^{k,l}$, თუ გამოვიყენებთ 1.2.7 ტოლობას და ლემა 3.3-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \int_{I_N}\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j(x-t)\right|d\mu(t) \qquad (3.2.5)\\
\leq\; & \frac{c}{M_N}\sum_{i=0}^{|n|}M_i\int_{I_N}\left|K_{M_i}(x-t)\right|d\mu(t) \\
\leq\; & \frac{c}{M_N}\int_{I_N}\sum_{i=0}^{l}M_iM_k\,d\mu(t)\leq\frac{cM_kM_l}{M_N^2}
\end{aligned}$$

და პირველი შეფასება დამტკიცებულია.

ახლა, ვთქვათ $x \in I_N^{k,N}$. მას შემდეგ, რაც $x - t \in I_N^{k,N}$, როცა $t \in I_N$, (1.2.4)-ის და (1.2.5)-ის კომბინაციით გვექნება

$$\left|D_i\left(x-t\right)\right| \leq M_k$$

და

$$\begin{aligned} & \int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j\left(x-t\right) \right| d\mu\left(t\right) \\ \leq \quad & \frac{c}{Q_n} \sum_{i=0}^{|n|} q_i \int_{I_N} \left|D_i\left(x-t\right)\right| d\mu\left(t\right) \\ \leq \quad & \frac{c}{Q_n} \sum_{i=0}^{|n|-1} q_i \int_{I_N} M_k d\mu\left(t\right) \leq \frac{cM_k}{M_N}. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

(3.2.5)-ის და (3.2.6)-ის თანახმად დამტკიცება დასრულებულია.

■

ლემა 3.5. *ვთქვათ* $n > M_N$ *და* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.1.13) *პირობას. მაშინ*

$$\left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j\left(x\right) \right| \leq \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{|n|} M_j \left|K_{M_j}(x)\right|,$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. რადგან მიმდევრობა არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Q_n} \left(q_{M_n} + \sum_{j=M_N}^{n-2} \left|q_j - q_{j+1}\right| + q_{n-1} \right) \\ \leq \quad & \frac{1}{Q_n} \left(q_{M_n} + \sum_{j=M_N}^{n-2} \left(q_j - q_{j+1}\right) + q_{n-1} \right) \\ \leq \quad & \frac{2q_{M_N}}{Q_n} \leq \frac{c}{Q_n} \leq \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 3.1-ის (3.2.1)-ს და (3.2.2)-ს ტოლობებს გვექნება

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j\left(x\right) \right| \\ \leq \quad & \left(\frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=M_N+1}^{n-2} \left|q_j - q_{j+1}\right| + q_{n-1} \right) \right) \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}(x)\right| \\ \leq \quad & \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}(x)\right|. \end{aligned}$$

დამტკიცება დასრულებულია.

■

ლემა 3.6. *ვთქვათ* $x \in I_N^{k,l}, \quad k = 0, \ldots, N-2, \quad l = k+1, \ldots, N-1$ *და* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.1.13) *პირობას. მაშინ*

$$\int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j (x-t) \right| d\mu(t) \leq \frac{cM_l M_k}{nM_N}.$$

ვთქვათ $x \in I_N^{k,N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j (x-t) \right| d\mu(t) \leq \frac{cM_k}{M_N}.$$

აქ c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in I_N^{k,l}$, სადაც $0 \leq k < l \leq N-1$ და $t \in I_N$. მას შემდეგ რაც $x - t \in I_N^{k,l}$, თუ გამოვიყენებთ ტოლობა 1.2.7-ს და ლემა 3.5-ს მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j (x-t) \right| d\mu(t) \qquad (3.2.7) \\ \leq \quad & \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{|n|} M_i \int_{I_N} \left| K_{M_i}(x-t) \right| d\mu(t) \\ \leq \quad & \frac{c}{n} \int_{I_N} \sum_{i=0}^{l} M_i M_k d\mu(t) \\ \leq \quad & \frac{cM_k M_l}{nM_N} \end{aligned}$$

ამით პირველი შეფასება დამტკიცებულია.

ახლა, ვთქვათ $x \in I_N^{k,N}$. რადგან $x-t \in I_N^{k,N}$ როცა $t \in I_N$, (1.2.7)-ის და ლემა 3.5-ის კომბინაციით გვაქვს

$$\begin{aligned} & \int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j (x-t) \right| d\mu(t) \qquad (3.2.8) \\ \leq \quad & \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{|n|} M_i \int_{I_N} \left| K_{M_i}(x-t) \right| d\mu(t) \\ \leq \quad & \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{|n|-1} M_i \int_{I_N} M_k d\mu(t) \\ \leq \quad & \frac{cM_k}{M_N}. \end{aligned}$$

(3.2.7)-ის და (3.2.8)-ის გამოყენებით დამტკიცება დასრულებულია.

■

ლემა 3.7. *დავუშვათ* $n \geq M_N, \quad x \in I_N^{k,l}, \quad k = 0, \ldots, N-1, \quad l = k+1, \ldots, N$ *და* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.1.13) *პირობას. მაშინ*

$$\int_{I_N} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=M_N}^{n-1} q_j D_j \left(x-t\right) \right| d\mu\left(t\right) \leq \frac{cM_l M_k}{M_N^2},$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. მას შემდეგ, რაც $n \geq M_N$, თუ გამოვიყენებთ ლემა 3.6-ს მაშინ მივიღებთ ლემა 3.7-ის დამტკიცებას.

■

ლემა 3.8. *დავუშვათ* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12)-ს. მაშინ*

$$|F_n| \leq \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{|n|} M_j \left| K_{M_j} \right|,$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. რადგან $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი, თუ გამოვიყენებთ (3.1.13) პირობას შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2} |q_j - q_{j+1}| + q_{n-1}\right) \\ &\leq \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=0}^{n-2} (q_{j+1} - q_j) + q_{n-1}\right) \\ \leq \quad &\frac{2q_{n-1} - q_0}{Q_n} \leq \frac{q_{n-1}}{Q_n} \leq \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 3.1-ის (3.2.1) და (3.2.2) ტოლობებს მივიღებთ

$$\begin{aligned} |F_n| &\leq \left(\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1} |q_j - q_{j+1}| + q_0\right)\right) \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}\right| \\ &= \left(\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-1} (q_j - q_{j+1}) + q_0\right)\right) \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}\right| \\ &\leq \frac{q_{n-1}}{Q_n} \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}\right| \leq \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{|n|} M_i \left|K_{M_i}\right|. \end{aligned}$$

დამტკიცება დასრულებულია.

■

ლემა 3.9. *დავუშვათ* $x \in I_N^{k,l}, \;\; k = 0, \ldots, N-2, \;\; l = k+1, \ldots, N-1$ *და* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას. მაშინ*

$$\int_{I_N} \left|F_n\left(x-t\right)\right| d\mu\left(t\right) \leq \frac{cM_l M_k}{nM_N}.$$

ვთქვათ $x \in I_N^{k,N}$, $\;k = 0, \ldots, N-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_N} |F_n(x-t)|\, d\mu(t) \leq \frac{cM_k}{M_N}.$$

აქ c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. ამ ლემის დამტკიცება ლემა 3.6-ის დამტკიცების ანალოგიურია. ასე რომ, ჩვენ გამოვტოვებთ დეტალებს.

■

ლემა 3.10. *ვთქვათ* $n \geq M_N$, $\;x \in I_N^{k,l}$, $\;k = 0, \ldots, N-1$, $\;l = k+1, \ldots, N$ *და* $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ *არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას. მაშინ*

$$\int_{I_N} |F_n(x-t)|\, d\mu(t) \leq \frac{cM_l M_k}{M_N^2},$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. მას შემდეგ, რაც $n \geq M_N$, თუ გამოვიყენებთ ლემა 3.9-ს ჩვენ მივიღებთ ლემის დამტკიცებას.

■

3.3 ვილენკინის სისტემების მიმართ T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

პირველ რიგში დავამტკიცებთ T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხებს ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე და ასევე ვაჩვენებთ მიღებული შედეგების განუზოგადებლობას გარკვეული აზრით.

შემდეგი თეორემის დამტკიცება მოყვანილია თუთბერიძის შრომაში [162]:

თეორემა 3.11. *ა) არაზრდადი* $\{q_k : k \geq 0\}$ *მიმდევრობით წარმოქმნილი (1.4.3) შეჯამებადობის მეთოდის* T^* *მაქსიმალური ოპერატორი არის შემოსაზღვრული ჰარდის* $H_{1/2}$ *სივრციდან* $weak - L_{1/2}$ *სივრცეში.*

დებულება განუზოგადებელია შემდეგი გაგებით:

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$ *და* $\{q_k : k \geq 0\}$ *არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს*

$$\frac{q_{n+1}}{Q_{n+2}} \geq \frac{c}{n}, \quad (c \geq 1). \tag{3.3.1}$$

პირობას. მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ *ისეთი, რომ*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

დამტკიცება. ა) ვთქვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი. (3.2.1)-ის და (3.2.2)-ის კომბინაციით და აბელის გარდაქმნის გამოყენებით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
|T_n f| &\le \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=1}^{n-1} q_j S_j f \right| \\
&\le \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} |q_j - q_{j+1}|\, j\, |\sigma_j f| + q_{n-1}(n-1)\, |\sigma_n f| \right)
\end{aligned}
$$

$$
\le \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} (q_j - q_{j+1})\, j + q_{n-1}(n-1) \right) \sigma^* f \le \sigma^* f
$$

ასე რომ

$$
T^* f \le \sigma^* f. \tag{3.3.2}
$$

თუ გამოვიყენებთ (3.3.2)-ს, და ცნობილ თეორემას, რომ σ^* არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არაზრდადი $\{q_k : k \ge 0\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი T^* ასევე არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში. ამით თეორემის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის დადებითი მთელი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} 1/\alpha_k^p < \infty, \tag{3.3.3}
$$

$$
\lambda \sum_{\eta=0}^{k-1} \frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p}}{\alpha_\eta} < \frac{M_{\alpha_k}^{1/p}}{\alpha_k}, \tag{3.3.4}
$$

$$
\frac{32\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}} < \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{\alpha_k}, \tag{3.3.5}
$$

სადაც $\lambda = \sup_{n \in \mathbf{N}} m_n$.

შევნიშნოთ, რომ ისეთი ზრდადი $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.3.3), (3.3.4) და (3.3.5) პირობებს შესაძლებელია აიგოს.

ვთქვათ

$$
f^{(n)} = \sum_{\{k;\, \lambda_k < n\}} \lambda_k a_k, \tag{3.3.6}
$$

სადაც

$$
\lambda_k = \frac{\lambda}{\alpha_k}, \qquad a_k = \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\lambda} \left(D_{M_{\alpha_k + 1}} - D_{M_{\alpha_k}} \right).
$$

ლემა 1.3-ის გამოყენებით ადვილი სანახავია, რომ მარტინგალი $f \in H_{1/2}$. უფრო მეტიც, ადვილი სანახავია, რომ

$$\widehat{f}(j)=\begin{cases}\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\alpha_k}, & \text{if } \ j\in\{M_{\alpha_k},...,M_{\alpha_k+1}-1\}\,,\ k=0,1,2...,\\ 0, & \text{if } \quad j\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{M_{\alpha_k},...,M_{\alpha_k+1}-1\}\,.\end{cases}\tag{3.3.7}$$

მეორეს მხრივ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$T_{M_{\alpha_k}+2}f=\frac{1}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\sum_{j=0}^{M_{\alpha_k}}q_jS_jf+\frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}S_{M_{\alpha_k}+1}f:=I+II.\tag{3.3.8}$$

დავუშვათ $M_{\alpha_s}\leq j\leq M_{\alpha_s+1}$, სადაც $s=0,...,k-1$. მაშინ

$$\left|D_j-D_{M_{\alpha_s}}\right|\leq j-M_{\alpha_s}\leq\lambda M_{\alpha_s},\quad (s\in\mathbb{N})$$

ასე რომ, (1.2.1)-ის და (3.3.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}|S_jf|&=\left|\sum_{v=0}^{M_{\alpha_{s-1}+1}-1}\widehat{f}(v)\psi_v+\sum_{v=M_{\alpha_s}}^{j-1}\widehat{f}(v)\psi_v\right|\\ &\leq\left|\sum_{\eta=0}^{s-1}\sum_{v=M_{\alpha_\eta}}^{M_{\alpha_\eta+1}-1}\frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p-1}}{\alpha_\eta}\psi_v\right|+\frac{M_{\alpha_s}^{1/p-1}}{\alpha_s}\left|\left(D_j-D_{M_{\alpha_s}}\right)\right|\\ &=\left|\sum_{\eta=0}^{s-1}\frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p-1}}{\alpha_\eta}\left(D_{M_{\alpha_\eta+1}}-D_{M_{\alpha_\eta}}\right)\right|+\frac{M_{\alpha_s}^{1/p-1}}{\alpha_s}\left|\left(D_j-D_{M_{\alpha_s}}\right)\right|\\ &\leq\lambda\sum_{\eta=0}^{s-1}\frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p}}{\alpha_\eta}+\frac{\lambda M_{\alpha_s}^{1/p}}{\alpha_s}\leq\frac{2\lambda M_{\alpha_{s-1}}^{1/p}}{\alpha_{s-1}}+\frac{\lambda M_{\alpha_s}^{1/p}}{\alpha_s}\leq\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}}.\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

ვთქვათ $M_{\alpha_{s-1}+1}+1\leq j\leq M_{\alpha_s}$, სადაც $s=1,...,k$. (2.3.4)-ის მსგავსად შეგვიძლია დამტკიცდეს

$$\begin{aligned}|S_jf|&=\left|\sum_{v=0}^{M_{\alpha_{s-1}+1}-1}\widehat{f}(v)\psi_v\right|=\left|\sum_{\eta=0}^{s-1}\sum_{v=M_{\alpha_\eta}}^{M_{\alpha_\eta+1}-1}\frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p-1}}{\alpha_\eta}\psi_v\right|\\ &=\left|\sum_{\eta=0}^{s-1}\frac{M_{\alpha_\eta}^{1/p-1}}{\alpha_\eta}\left(D_{M_{\alpha_\eta+1}}-D_{M_{\alpha_\eta}}\right)\right|\leq\frac{2\lambda M_{\alpha_{s-1}}^{1/p}}{\alpha_{s-1}}\leq\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}}.\end{aligned}$$

აქედან,

$$|I|\leq\frac{1}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\sum_{j=0}^{M_{\alpha_k}}q_j\left|S_jf\right|\leq\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}}\frac{1}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\sum_{j=0}^{M_{\alpha_k}}q_j\leq\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}}.\tag{3.3.10}$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (3.3.7)-ს და (3.3.9)-ს მივიღებთ

$$|II|\quad=\quad\frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\left|\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\alpha_k}\psi_{M_{\alpha_k}}+S_{M_{\alpha_k}}f\right|\tag{3.3.11}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\left|\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\alpha_k}\psi_{M_{\alpha_k}}+S_{M_{\alpha_{k-1}+1}}f\right| \\
&\geq \frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\left(\left|\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\alpha_k}\psi_{M_{\alpha_k}}\right|-\left|S_{M_{\alpha_{k-1}+2}}f\right|\right) \\
&\geq \frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\left(\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{\alpha_k}-\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}}\right) \\
&\geq \frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{4\alpha_k}.
\end{aligned}
$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ (3.3.1)-ში $c = 1$. (3.3.10)-ის და (3.3.11)-ის კომბინაციით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\left|T_{M_{\alpha_k}+2}f\right| &\geq |II|-|I| \geq \frac{q_{M_{\alpha_k}+1}}{Q_{M_{\alpha_k}+2}}\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-1}}{4\alpha_k}-\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}} \\
&\geq \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{4\alpha_k}-\frac{4\lambda M_{\alpha_{k-1}}^{1/p}}{\alpha_{k-1}} \geq \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{16\alpha_k}.
\end{aligned} \tag{3.3.12}
$$

მეორეს მხრივ,

$$
\mu\left\{x\in G_m : \left|T_{M_{\alpha_k}+2}f(x)\right| \geq \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{16\alpha_k}\right\} = \mu(G_m) = 1. \tag{3.3.13}
$$

დავუშვათ $0 < p < 1/2$. მაშინ

$$
\begin{aligned}
&\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{16\alpha_k}\cdot\left(\mu\left\{x\in G_m : \left|T_{M_{\alpha_k}+2}f(x)\right| \geq \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{16\alpha_k}\right\}\right)^{1/p} \\
= &\frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{16\alpha_k} \to \infty, \quad \text{როცა } k\to\infty.
\end{aligned} \tag{3.3.14}
$$

დამტკიცება დასრულებულია. ■

კერძო შემთხვევებში, ჩვენი თეორემები განსაკუთრებით საინტერესოა და იძლევა როგორც კარგად ცნობილ, ასევე ახალ შედეგებს. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ისეთი T საშუალოების მაგალითებს, რომლებიც წარმოქმნილია არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობებით. აღნიშნული შედეგები (იხ. შედეგები 3.12, 3.13, 3.14) მოყვანილია თუთბერიძის ნაშრომში [162]:

შედეგი 3.12. *მაქსიმალური ოპერატორები $U^{\alpha,*}$, $V^{\alpha,*}$ და R^* არიან შემოსაზღვრულნი ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში, მაგრამ არ არიან შემოსაზღვრულნი H_p-დან $weak-L_p$-ში როცა $0<p<1/2$.*

დამტკიცება. რადგან R_n, U_n^{α} და V_n^{α} არიან T საშუალოები არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, მაშინ ამ დასკვნის დამტკიცება არის თეორემის პირდაპირი შედეგი 3.11.

■

შედეგი 3.13. *ვთქვათ $f \in L_1$ და T_n არის არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი T საშუალოები. მაშინ $T_n f \to f$, თ.ყ., როცა $n \to \infty$.*

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3.11-ის ა) ნაწილს და ლემა 1.5-ს ჩვენ ასევე მივიღებთ რომ T^* მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. მეორეს მხრივ, თუ მიმვმართავთ მარჩინკევიჩისა და ზიგმუნდის [186] (იხ. ლემა 1.1) თეორემას დავადგენთ $T_n f \to f$, თ.ყ., ყოველი $f \in L_1$-სთვის, საიდანაც გამომდინარეობს შედეგი 3.13-ის დამტკიცება.

■

შედეგი 3.14. *დავუშვათ $f \in L_1$. მაშინ*

$$\begin{aligned} R_n f &\to f, \quad \text{თ.ყ.,} \quad \text{როცა } n \to \infty, \\ U_n^\alpha f &\to f, \quad \text{თ.ყ.,} \quad \text{როცა } n \to \infty, \\ V_n^\alpha f &\to f, \quad \text{თ.ყ.,} \quad \text{როცა } n \to \infty, \end{aligned}$$

დამტკიცება. რადგან R_n, U_n^α და V_n^α არიან T საშუალოები არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, მაშინ ამ შედეგის დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს შედეგი 3.13-დან.

■

შემდეგი თეორემის დამტკიცება მოყვანილია თუთბერიძის [162] შრომაში:

თეორემა 3.15. *ა) არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქნილი T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი T^*, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (3.1.12). მაშინ შემოსაზღვრულია ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში.*

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$. ნებისმიერი არაკლებად $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქნილი T საშუალოსთვის, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n f\|_{weak-L_p} = \infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი. ლემა 3.1-ის (3.2.1) და (3.2.2) ტოლობების და აბელის გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} |T_n f| &\leq \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=1}^{n-1} q_j S_j f \right| \\ &\leq \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} |q_j - q_{j+1}| \, j \, |\sigma_j f| + q_{n-1}(n-1) \, |\sigma_n f| \right) \\ &\leq \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} - (q_j - q_{j+1}) \, j - q_{n-1}(n-1) + 2q_{n-1}(n-1) \right) \sigma^* f \\ &\leq \frac{1}{Q_n} \left(2q_{n-1}(n-1) - Q_n \right) \sigma^* f \leq c\sigma^* f \end{aligned}$$

ასე რომ

$$T^*f \leq c\sigma^*f. \tag{3.3.15}$$

თუ გამოვიყენებთ (3.3.15)-ს, იმის გათვალისწინებით, რომ σ^* არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი T^*, რომლებიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას არიან შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში. ამით თეორემა 3.15-ის ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

თეორემა 3.15-ის ბ) ნაწილის დასამტკიცებლად ჩვენ გამოვიყენებთ მარტინგალს, რომელიც განსაზღვრულია (3.3.6)-ით, სადაც α_k მიმდევრობა აკმაყოფილებს (3.3.3), (3.3.4) და (3.3.5) პირობებს. ადვილი სანახავია, რომ ნებისმიერი არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობისთვის ავტომატურად სამართლიანია უტოლობა

$$q_{M_{\alpha_k+1}}/Q_{M_{\alpha_k+2}} \geq c/M_{\alpha_k}.$$

(3.3.12)-ის, (3.3.13)-ის და (3.3.14)-ის მიხედვით ვასკვნით, რომ

$$\left|T_{M_{\alpha_k}+2}f\right| \geq |II| - |I| \geq \frac{M_{\alpha_k}^{1/p-2}}{8\alpha_k}.$$

(3.3.13)-ის ანალოგიურად მივიღებთ

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|T_{M_{\alpha_k}+2}f\right\|_{weak-L_p} = \infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

■

კერძო შემთხვევებში, ჩვენი შედეგები განსაკუთრებით საინტერესოა და იძლევა როგორც კარგად ცნობილ, ასევე ახალ ინფორმაციას. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ისეთი T საშუალოების მაგალითებს, რომლებიც წარმოქმნილია არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობებით. აღნიშნული შედეგები (იხ. შედეგები 3.16, 3.17, 3.18) მოყვანილია თუთბერიძის ნაშრომში [162]:

შედეგი 3.16. *მაქსიმალური ოპერატორი $B^{\alpha,\beta,*}$ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული H_p-დან $weak - L_p$-ში, როცა $0 < p < 1/2$.*

დამტკიცება. მას შემდეგ, რაც $B^{\alpha,\beta,*}$ არის T საშუალო, წარმოქმნილი არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, მაშინ ამ შედეგის დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს თეორემა 3.15-დან.

■

შედეგი 3.17. *დავუშვათ $f \in L_1$ და T_n არის T საშუალოები არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.1.12) პირობას. მაშინ*

$$T_nf \to f, \quad \text{თ.ყ.,} \quad \text{როცა} \;\; n \to \infty.$$

დამტკიცება. თეორემა 3.15-ის და ლემა 1.5-ის თანახმად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ T^* აქვს სუსტი–

$(1,1)$ ტიპი. თუ გამოვიყენებთ მარჩინკევიჩისა და ზიგმუნდის [186] (იხ. ლემა 1.1) ცნობილ თეორემას მივიღებთ, რომ $T_n f \to f$, თ.ყ., საიდანაც გამომდინარეობს შედეგი 3.17-ის დამტკიცება.

■

შედეგი 3.18. *დავუშვათ* $f \in L_1$. *მაშინ* $B_n^{\alpha,\beta} f \to f$, *თ.ყ., როცა* $n \to \infty$.

დამტკიცება. მას შემდეგ, რაც $B^{\alpha,\beta,*}$ არიან T საშუალოები, რომლებიც წარმოქმნილნი არიან არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით, მაშინ შედეგი 3.18-ის დამტკიცება არის შედეგი 3.17-ის პირდაპირი შედეგი.

■

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია თუთბერიძის [163] შრომაში:

თეორემა 3.19. *ვთქვათ* $0 < p \leq 1/2$, $f \in H_p$ *და* $\{q_k : k \geq 0\}$ *არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{T}_p^* f := \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p *სივრციდან ლებეგის* L_p *სივრცეში.*

დამტკიცება. დავუშვათ $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი. (3.2.1)-ის და (3.2.3)-ის ტოლობების კომბინაციით გვაქვს

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_p^* f &:= \frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{j=1}^{n-1} q_j S_j f \right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} |q_j - q_{j+1}| \, j \, |\sigma_j f| + q_{n-1}(n-1) |\sigma_n f| \right) \\
&\leq \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} \frac{|q_j - q_{j+1}| \, j \, |\sigma_j f|}{(j+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(j+1)} + \frac{q_{n-1}(n-1) |\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} \right) \\
&\leq \frac{1}{Q_n} \left(\sum_{j=1}^{n-2} (q_j - q_{j+1}) \, j + q_{n-1}(n-1) \right) \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2} \log^{2[1/2+p]}(n+1)} := \widetilde{\sigma}_p^* f,
\end{aligned}$$

ასე რომ

$$\widetilde{T}_p^* f \leq \widetilde{\sigma}_p^* f. \tag{3.3.16}$$

თუ გამოვიყენებთ (3.3.16)-ს, (იხ. ტეფნაძე [138, 139]) იმის გათვალისწინებით, რომ $\widetilde{\sigma}_p^* f$ არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში, როცა $0 < p \leq 1/2$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით წარმოქმნილი T საშუალოების წონიანი მაქსიმა-

ლური ოპერატორები $\widetilde{T}_p^*$ არაინ შემოსაზღვრულნი ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში, როცა $0<p\leq 1/2$. თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. ■

კერძო შემთხვევებში, ჩვენი თეორემები განსაკუთრებით საინტერესოა და იძლევა როგორც კარგად ცნობილ, ასევე ახალ შედეგებს. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ისეთი T საშუალოების მაგალითებს, რომლებიც წარმოქმნილია არაზრდადი $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობებით. აღნიშნული შედეგები (იხ. შედეგები 3.20, 3.21, 3.22) ამ თეზისში პირველადაა დამტკიცებული, მაგრამ ის ასევე მოყვანილია დასაბეჭდად გაგზავნილ სტატიაში (დეტალებისთვის იხ. თუთბერიძე [163]):

შედეგი 3.20. *დავუშვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{R}_p^* f:=\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|R_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

შედეგი 3.21. *დავუშვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{U}_p^{\alpha,*} f:=\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|U_n^{\alpha} f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

შედეგი 3.22. *ვთქვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{V}_p^{\alpha,*} f:=\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|V_n^{\alpha} f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია თუთბერიძის [163] შრომაში:

თეორემა 3.23. *დავუშვათ $0<p\leq 1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.1.12) *პირობას, მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{T}_p^* f:=\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაკლებადი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) პირობას. (3.2.1) და (3.2.3) ტოლობების კომბინაციით მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
& \frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \\
\leq\ & \frac{1}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=1}^{n-1} q_j S_j f\right| \\
\leq\ & \frac{1}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}\frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-2}|q_j-q_{j+1}|\, j\,|\sigma_j f| + q_{n-1}(n-1)\,|\sigma_n f|\right) \\
\leq\ & \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-2}\frac{|q_j-q_{j+1}|\, j\,|\sigma_j f|}{(j+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(j+1)} + \frac{q_{n-1}(n-1)\,|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{n-2}(q_{j+1}-q_j)\, j + q_{n-1}(n-1)\right)\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \\
\leq\ & \frac{2q_{n-1}(n-1)-Q_n}{Q_n}\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \\
\leq\ & \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}
\end{aligned}
$$

ასე რომ

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|T_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}. \tag{3.3.17}
$$

თუ გამოვიყენებთ (3.3.17)-ს, და იმ ფაქტს, რომ (იხ. [138, 139]) $\widetilde{\sigma}_p^* f$ შემოსაზღვრულია ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში, როცა $0 < p \leq 1/2$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არაკლებადი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობით განსაზღვრული T საშუალოების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორები $\widetilde{T}_p^*$ არიან შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

■

შედეგი 3.16 და შენიშვნა 3.25 მოყვანილია თუთბერიძის ნაშრომში [163]:

შედეგი 3.24. *დავუშვათ* $0 < p \leq 1/2$, $f \in H_p$ *და* $\{q_k : k \geq 0\}$ *არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ*

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}} q_n < c < \infty. \tag{3.3.18}
$$

მაშინ ყველა ასეთი T *საშუელოები არიან შემოსაზღვრული ჰარდის* H_p *სივრციდან ლებეგის* L_p *სივრცე-ში.*

დამტკიცება. (3.3.18)-ის გამოყენებით გვაქვს, რომ

$$
\frac{q_{n-1}}{Q_n} \leq \frac{c}{Q_n} \leq \frac{c}{q_0 n} = \frac{c_1}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ as } n \to 0,
$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ პირობა (3.1.12) არის დაკმაყოფილებული და ყველა ასეთი T საშუე-ლო შემოსაზღვრულია ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

■

შენიშვნა 3.25. *მას შემდეგ, რაც (იხ. ტეფნაძე [138,139]) მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{\sigma}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|\sigma_n f|}{(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში და $(n+1)^{1/p-2}\log^{2[1/2+p]}$ მნიშვნელის რიგი არის ზუსტი, ამ მიმდევრობის რიგი ასევე ზუსტი იქნება 3.19 და 3.23 თეორემებში, რადგან ფეიერის საშუალო არიან როგორც არაზრდადი, ისე არაკლებადი მიმდევრობებით განსაზღვრული T საშუალოების მაგალითი.

3.4 ჰარდის ტიპის უტოლობები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების T საშუალოების H_p ნორმებისათვის

ამ თავში მოყვანილი ყველა თეორემა პირველადაა დამტკიცებული ამ თეზისში მაგრამ მისი ნახვა ასევე შესაძლებელია დასაბეჭდად გაგზავნილ შრომაში (დეტალებისთვის იხ. [163]):

თეორემა 3.26. *ა) დავუშვათ $0<p<1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ უტოლობა*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|T_k f\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \|f\|_{H_p}^p$$

არის სამართლიანი.

ბ) დავუშვათ $f\in H_{1/2}$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (3.1.13). *მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|T_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k} \leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}. \tag{3.4.1}$$

დამტკიცება. დავუშვათ $0<p\leq 1/2$ და $\{q_k : k\geq 0\}$ მიმდევრობა არის არაზრდადი. ლემა 1.3-ის (იხ.ასევე (1.4)) გამოყენებით თეორემის ა) ნაწილის დამტკიცებისთვის საკმარისი იქნება ვაჩვენოთ

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\|T_m a\|_{H_p}^p}{m^{2-2p}} \leq c_p$$

თითოეული p-ატომისთვის a, სუპორტით I, $\mu(I)=M_N^{-1}$. შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ $I=I_N$. ადვილი სანახავია რომ $S_n(a)=T_n(a)=0$, როცა $n\leq M_N$. ამიტომ, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $n>M_N$.

დავუშვათ $x\in I_N$. რადგან T_n არის შემოსაზღვრული L_∞-დან L_∞-ში (შემოსაზღვრულობა გამომდინარეობს ლემა 3.2-სგან) და $\|a\|_\infty\leq M_N^{1/p}$ მივიღებთ, რომ

$$\int_{I_N}|T_m a|^p d\mu \leq \frac{\|a\|_\infty^p}{M_N}\leq c<\infty.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\int_{I_N}|T_m a|^p\,d\mu}{m^{2-2p}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2-2p}}\leq c<\infty\quad 0<p<1/2.. \tag{3.4.2}$$

ადვილი სანახავია

$$\begin{aligned}|T_m a(x)| &= \left|\int_{I_N}a(t)\,F_n(x-t)\,d\mu(t)\right| \qquad (3.4.3)\\ &= \left|\int_{I_N}a(t)\,\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n}q_jD_j(x-t)\,d\mu(t)\right|\\ &\leq \|a\|_\infty\int_{I_N}\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n}q_jD_j(x-t)\right|d\mu(t)\\ &\leq M_N^{1/p}\int_{I_N}\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n}q_jD_j(x-t)\right|d\mu(t)\end{aligned}$$

ვთქვათ T_n არის T საშუალოები, არაზრდადი კოეფიციენტებით $\{q_k:k\geq 0\}$ და $x\in I_N^{k,l}$, $0\leq k<l\leq N$. ლემა 2.5-ის გამოყენებით გვაქვს

$$|T_m a(x)|\leq cM_lM_kM_N^{1/p-2},\ \text{როცა}\ 0<p<1/2. \tag{3.4.4}$$

ვთქვათ $0<p<1/2$. (1.1.1)-ის, (3.4.3)-ის და (3.4.4)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}\int_{\overline{I_N}}|T_m a|^p\,d\mu &= \sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\sum_{x_j=0,\ j\in\{l+1,\dots,N-1\}}^{m_{j-1}}\int_{I_N^{k,l}}|T_m a|^p\,d\mu \qquad (3.4.5)\\ &+ \sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_N^{k,N}}|T_m a|^p\,d\mu\\ &\leq c\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{m_{l+1}\cdots m_{N-1}}{M_N}(M_lM_k)^p\,M_N^{1-2p}\\ &+ \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{M_N}M_k^pM_N^{1-p}\\ &\leq cM_N^{1-2p}\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{(M_lM_k)^p}{M_l}\\ &+ \sum_{k=0}^{N-1}\frac{M_k^p}{M_N^p}\leq cM_N^{1-2p}.\end{aligned}$$

უფრო მეტიც, (3.4.5)-ის დახმარებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{m=M_N+1}^{\infty}\frac{\int_{\overline{I_N}}|T_m a|^p\,d\mu}{m^{2-2p}}\leq\sum_{m=M_N+1}^{\infty}\frac{cM_N^{1-2p}}{m^{2-2p}}<c<\infty,\quad(0<p<1/2). \tag{3.4.6}$$

(3.4.2)-ის და (3.4.6)-ის გაერთიანებით მივიღებთ თეორემის ა) ნაწილის დამტკიცებას.

დავუშვათ, რომ $p=1/2$ და T_n არის T საშუალო, არაზრდადი $\{q_k:k\geq 0\}$ კოეფიციენტებით,

რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.13) პირობას. ლემა 1.3-ის გამოყენებით ბ) ნაწილის დამტკიცებისთვის საკმარისი იქნება ვაჩვენოთ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\|T_m a\|_{H_{1/2}}^{1/2}}{m}\le c,$$

ყოველი $1/2$-ატომისთვის a, სუპორტით I, $\mu(I)=M_N^{-1}$.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $I=I_N$. ადვილი სანახავია, რომ $S_n(a)=T_n(a)=0$, როცა $n\le M_N$. ამიტომ, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n>M_N$.

დავუშვათ $x\in I_N$. რადგან T_n არის შემოსაზღვრული L_∞-დან L_∞-ში (შემოსაზღვრულობა გამომდინარეობს ლემა 3.2-დან) და $\|a\|_\infty\le M_N^2$ მივიღებთ

$$\int_{I_N}|T_m a|^{1/2}\,d\mu\le\frac{\|a\|_\infty^{1/2}}{M_N}\le c<\infty.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\int_{I_N}|T_m a|^{1/2}\,d\mu}{m}\le\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m}\le c<\infty. \tag{3.4.7}$$

ადვილი სანახავია

$$\begin{aligned}|T_m a(x)| &= \left|\int_{I_N}a(t)\frac{1}{Q_n}\sum_{j=M_N}^{n}q_jD_j(x-t)\,d\mu(t)\right| \\ &\le \|a\|_\infty\int_{I_N}|F_m(x-t)|\,d\mu(t) \\ &\le M_N^2\int_{I_N}|F_m(x-t)|\,d\mu(t).\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

დავუშვათ $x\in I_N^{k,l}$, $0\le k<l<N$. მაშინ ლემა 3.6-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|T_m a(x)|\le\frac{cM_lM_kM_N}{m}. \tag{3.4.9}$$

დავუშვათ $x\in I_N^{k,N}$. მაშნ, ლემა 3.6-ის თანახმად გვექნება

$$|T_m a(x)|\le cM_kM_N. \tag{3.4.10}$$

(1.1.1)-ის, (3.4.8)-ის, (3.4.9)-ის და (3.4.10)-ის კომბინაციებით გვაქვს

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{I_N}}|T_m a(x)|^{1/2}\,d\mu(x)\\ \le\ & c\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{m_{l+1}\cdots m_{N-1}}{M_N}\frac{(M_lM_k)^{1/2}M_N^{1/2}}{m^{1/2}}\\ +\ &\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{M_N}M_k^{1/2}M_N^{1/2}\\ \le\ & M_N^{1/2}\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{(M_lM_k)^{1/2}}{m^{1/2}M_l}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{M_k^{1/2}}{M_N^{1/2}}\le\frac{cM_N^{1/2}N}{m^{1/2}}+c.\end{aligned}$$

საიდანაც,

$$\frac{1}{\log n}\sum_{m=M_N+1}^{n}\frac{\int_{\overline{I_N}}|T_m a(x)|^{1/2}\,d\mu(x)}{m} \tag{3.4.11}$$
$$\leq \frac{1}{\log n}\sum_{m=M_N+1}^{n}\left(\frac{cM_N^{1/2}N}{m^{3/2}}+\frac{c}{m}\right)<c<\infty.$$

(3.4.7)-ის და (3.4.12)-ის კომბინაციით ჩვენ ასევე მივიღებთ ბ) ნაწილის სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

■

შედეგი 3.27. *ვთქვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]}n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\sigma_k f\|_p^p}{k^{2-2p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

შედეგი 3.28. *ვთქვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]}n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|U_k^\alpha f\|_p^p}{k^{2-2p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

შედეგი 3.29. *ვთქვათ $0<p\leq 1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]}n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|V_k^\alpha f\|_p^p}{k^{2-2p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

შედეგი 3.30. *ვთქვათ $0<p<1/2$ და $f\in H_p$. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|R_k f\|_p^p}{k^{2-2p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

თეორემა 3.31. *ა) ვთქვათ $0<p<1/2$, $f\in H_p$ და $\{q_k:k\geq 0\}$ არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|T_k f\|_p^p}{k^{2-2p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

ბ) ვთქვათ $f\in H_{1/2}$ და $\{q_k:k\geq 0\}$ არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.12) *პირობას. მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|T_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k}\leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2} \tag{3.4.12}$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ 3.9 და 3.10 ლემებს და თუ მივყვებით თეორემა 3.26-ის დამტკიცების ანალოგიურ საფეხურებს, ჩვენ მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. ამიტომ ჩვენ გამოვტოვებთ დეტალებს.

■

შედეგი 3.32. *დავუშვათ* $0 < p \leq 1/2$, $f \in H_p$ *და* $\{q_k : k \geq 0\}$ *არის არაკლებადი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q_n < c < \infty.$$

მაშინ პირობა (3.1.12) არის სამართლიანი და ასეთი T *საშუალოებისთვის არსებობს აბსოლუტური მუდმივი* c, *ისეთი რომ სამართლიანია (3.4.12) უტოლობა.*

ჩვენ აქამდე განვიხილეთ ის შემთხვები, როცა $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობა არის შემოსაზღვრული. ახლა, განვიხილოთ T საშუალოები, რომელიც არის წარმოქმნილი შემოუსაზღვრელი $\{q_k : k \geq 0\}$ მიმდევრობებით.

შედეგი 3.33. *დავუშვათ* $0 < p \leq 1/2$ *და* $f \in H_p$. *მაშინ არსებობს* p*-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი* c_p *ისეთი, რომ სამართლიანია უტოლობა*

$$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\|B_k^{\alpha,\beta} f\right\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \left\|f\right\|_{H_p}^p.$$

4 რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები ჰარდის მარტინგალურ H_p სივრცეებში

4.1 რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ზოგიერთი კლასიკური შედეგები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივებისთვის

ტრიგონომეტრიული სისტემების მიმართ რისის ლოგარითმული საშუალოები შესწავლილია უამრავი ავტორის მიერ. მაგალითად, ჩვენ გავიხსენოთ საზის [133] და იაბუტას [179] შრომები. ეს საშუალოები უოლშის და ვილენკინის სისტემებისთვის შეისწავლა შიმონმა [117] და გატმა [38]. ბლაჰოტამ და გატმა [22] განიხილეს ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ნორმით შეჯამებადობა და აჩვენეს, რომ რისის ლოგარითმულ საშუელოებს R_n აქვთ უკეთესი აპროქსიმაციული თვისებები ზოგიერთ შემოუსაზღვრელ ვილენკინის ჯგუფებში ვიდრე ფეიერის საშუალოებს. უფრო მეტიც, [146]-ში დამტკიცებულია, რომ რისის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში, როცა $p > 1/2$, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული, როცა $0 < p \leq 1/2$. რისის ლოგარითმული საშუალოების H_p ნორმებისთვის ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა განხილულია ლუკასენის, პერსონის, ტეფნაძის და თუთბერიძის მიერ [77]-ში და ტეფნაძის მიერ [146]-ში.

[147]-ში ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ რისის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი R^* არის შემოსაზღვრულნი ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak - L_{1/2}$ სივრცეში. უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$, სადაც $0 < p \leq 1/2$, ისეთი, რომ

$$\|R^* f\|_p = +\infty.$$

[146]-ში ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი $0 < p < 1/2$-სთვის მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{R}_p^* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log n \, |R_n f|}{(n+1)^{1/p-2}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში.

უფრო მეტიც, $0 < p < 1/2$-სთვის და არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისათვის რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{(n+1)^{1/p-2}}{\log(n+1)\,\varphi(n)} = \infty, \tag{4.1.1}$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|R_n f|}{\varphi(n)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან $weak - L_p$ სივრცეში.

იმ შემთხვევაში, როცა $p = 1/2$ მან ასევე აჩვენა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{R}^* f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|R_n f|}{\log(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $L_{1/2}$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, ნებისმირი არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც სამართლიანია პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(n+1)}{\varphi(n)} = +\infty,$$

მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|R_n f|}{\varphi(n)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $L_{1/2}$ სივრცეში.

ამ თეზისში (იხ. [77]) ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ თუ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G_m)$, არსებობს p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n \left\|R_n f\right\|_{H_p}^p}{n^{2-2p}} \leq c_p \left\|f\right\|_{H_p}^p,$$

სადაც $R_n f$ აღნიშნავს f ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების n-ურ რისის ლოგარითმულ საშუალოს.

მორისიმ და სიდიკიმ [81] შეისწავლეს L_p ფუნქციების უოლშ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის საშუალოების აპროქსიმაციის თვისებები. ის შემთხვევა, როცა $\{q_k = 1/k : k \in \mathbb{N}\}$ განხილული არ იყო, რადგან მორიჩისა და სიდიკის მეთოდები არ გამოიყენება ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოებისთვის. ფრიდლიმ, მანჩანდამ და სიდიკიმ [35]-ში განაზოგადეს მორიჩის და სიდიკის [81] შედეგი ორობით ჰომოგენურ ბანახის სივრცეებში და ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში. [39]-ში გატმა და გოგინავამ განიხილეს ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების ზოგიერთი კრებადობის და განშლადობის საკითხები უწყვეტ ფუნქციათა და ლებეგის L_1 სივრცეებში. კერძოდ, მათ გასცეს უარყოფითი პასუხი მორისის და სიდიკის [81] კითხვას. გატმა და გოგინავამ [40] დაამტკიცეს, რომ ნებისმიერი ზომადი ფუნქცია აკმაყოფილებს $\phi(u) = o\left(u \log^{1/2} u\right), \quad u \to \infty$, არსებობს ინტეგრირებადი f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\int_{G_m} \phi(|f(x)|)\, d\mu\,(x) < \infty$$

და დადებითი ზომის სიმრავლე ისეთი, რომ f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის ლოგარითმული საშუალებები არაა კრებადი ამ დადებითი ზომის სიმრავლეზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორს

$$L^* f \quad := \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n f|$$

არ აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი.

მეორეს მხრივ, არსებობს აბსოლუტური მუდმივი c_p ისეთი, რომ

$$\left\|L^* f\right\|_p \leq c_p \left\|f\right\|_p, \quad \text{როცა} \quad f \in L_p, \quad p > 1.$$

თუ განვიხილავთ შემდეგ შეზღუდულ მაქსიმალურ ოპერატორს

$$\widetilde{L}^*_{\#} f \quad := \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_{M_n} f|, \quad (M_k := m_0 ... m_{k-1}, \quad k = 0, 1...)$$

მაშინ

$$\lambda\mu\left\{\widetilde{L}_{\#}^{*}f>\lambda\right\}\leq c\left\Vert f\right\Vert _{1},\quad f\in L_{1}(G_{m}),\ \ \lambda>0.$$

აქედან გამომდინარე, თუ $f\in L_{1}(G_{m})$, მაშინ

$$L_{M_{n}}f\rightarrow f,\ \ \text{თ.ყ.}\ \ \ G_{m}-\text{ზე}.$$

ამ თეზისში ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ თუ $f\in L_{1}(G_{m})$, მაშინ $L_{M_{n}}f(x)\rightarrow f(x)$ ყოველი ლებეგის წერტილისთვის.

[140]-ში დამტკიცებულია, რომ არსებობს მარტინგალი $f\in H_{p}$, $(0<p\leq 1)$ ისეთი, რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი L^{*} არ არის შემოსაზღვრული ლებეგის L_{p} სივრცეში. კერძოდ, არსებობს მარტინგალი $f\in H_{p}$ ისეთი, რომ

$$\left\Vert L^{*}f\right\Vert _{p}=+\infty.$$

ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების წონიანი მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობა განხილულია [105]-ში პერსონის, ტეფნაძის და ვალის მიერ. კერძოდ, მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{L}^{*}f:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left\vert L_{n}f\right\vert }{\log\left(n+1\right)}$$

შემოსაზღვრულია ჰარდის $H_{1}\left(G_{m}\right)$ სივრციდან ლებეგის $L_{1}\left(G_{m}\right)$ სივრცეში.

უფრო მეტიც, თუ $\varphi:\mathbb{N}_{+}\rightarrow[1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\overline{\lim_{n\rightarrow\infty}}\frac{\log\left(n+1\right)}{\varphi\left(n\right)}=+\infty, \tag{4.1.2}$$

პირობას, მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_{1}\left(G_{m}\right)$ ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left\vert L_{n}f\right\vert }{\varphi\left(n\right)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1}\left(G_{m}\right)$ სივრციდან ლებეგის $L_{1}\left(G_{m}\right)$ სივრცეში.

ტეფნაძემ და თუთბერიძემ [164]-ში დაამტკიცეს, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\tilde{L}_{p}^{*}f:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left\vert L_{n}f\right\vert }{\left(n+1\right)^{1/p-1}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{p}\left(G_{m}\right)$ სივრციდან ლებეგის $L_{p}\left(G_{m}\right)$ სივრცეში.

ასევე დავამტკიცდა, რომ $0<p<1$-სთვის და არაკლებადი $\varphi:\mathbb{N}_{+}\rightarrow[1,\infty)$ ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც სამართლიანია პირობა

$$\overline{\lim_{n\rightarrow\infty}}\frac{n^{1/p-1}}{\log n\varphi\left(n\right)}=+\infty,$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m)$ ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{\varphi(n+1)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში. ამ ნაშრომში ასევე აღნიშნული იყო შემდეგი ღია პრობლემა:

ღია პრობლემა: ნებისმიერი $0 < p < 1$-სთვის ვიპოვოთ არაკლებადი ფუნქცია $\Theta : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ისეთი, რომ შემდეგი მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{L}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{\Theta(n+1)}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში და $\Theta : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$-ს სიჩქარე არის ზუსტი, რაც იმაში მდგომარეობს რომ ნებისმიერი არაკლებადი $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1, \infty)$ ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც სამართლიანია პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Theta(n)}{\varphi(n)} = +\infty,$$

არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m)$ ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{\varphi(n+1)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში.

ზემოთ მოცემული თეორემების მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არსებობს აბსოლუტური მუდმივები C_1 და C_2 ისეთები, რომ

$$\frac{C_1 n^{1/p-1}}{\log(n+1)} \leq \Theta(n) \leq C_2 n^{1/p-1}.$$

მოგვიანებით, მემიჩმა განაზოგადა ტეფნაძის და თუთბერიძის [164] შედეგი და აჩვენა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log n \, |L_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში.

ამ შედეგის სიზუსტე დაუყოვნებლივ მოყვება ტეფნაძის და თუთბერიძის [164] უარყოფით შედეგს, რაც უკვე ზემოთ იყო ნათქვამი.

4.2 დამხმარე ლემები

ჩვენ გვჭირდება შემდეგი ლემა, რომელსაც გააჩნია დამოუკიდებელი ინტერესიც. ლემაში მიღებული ტოლობა ასევე დამტკიცებულია ტეფნაძის მიერაც [146]:

ლემა 4.1. *დავუშვათ $n \in \mathbb{N}$. მაშინ*

$$Y_n = \frac{1}{l_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{K_j}{j+1} + \frac{K_n}{l_n}. \tag{4.2.1}$$

უფრო მეტიც,

$$\|Y_n\|_1 < c < \infty. \tag{4.2.2}$$

დამტკიცება. იმისთვის, რომ მივიღოთ რისის ლოგარითმული საშუალოების გულებისთვის ტოლობა (4.2.1), ჩვენ მხოლოდ დაგვჭირდება აბელის გარდაქმნის გამოყენება. მეორეს მხრივ, (4.2.2) უტოლობა დაუყოვნებლივ მოჰყვება (1.2.10) უტოლობას და (4.2.1) ტოლობას. ■

ჩვენი ძირითადი შედეგების დასამტკიცებლად საჭიროა შემდეგი ლემა, რომელიც დამტკიცებულია [146]-ში ტეფნაძის მიერ. ჩვენ აქ მოვიყვანთ მოკლე დამტკიცებას:

ლემა 4.2. *ვთქვათ* $x \in I_N(x_k e_k + x_l e_l)$, $1 \leq x_k \leq m_k - 1$, $1 \leq x_l \leq m_l - 1$, $k = 0, ..., N-2$, $l = k+1, ..., N-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_N} \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{|K_j(x-t)|}{j+1} d\mu(t) \leq \frac{cM_k M_l}{M_N^2}.$$

თუ $x \in I_N(x_k e_k)$, $1 \leq x_k \leq m_k - 1$, $k = 0, ..., N-1$, *მაშინ*

$$\int_{I_N} \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{|K_j(x-t)|}{j+1} d\mu(t) \leq \frac{cM_k}{M_N} l_n.$$

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in I_N(x_k e_k + x_l e_l)$, $1 \leq x_k \leq m_k - 1$, $1 \leq x_l \leq m_l - 1$, $k = 0, ..., N-2$, $l = k+1, ..., N-1$. ლემა 2.4-ის გამოყენებით გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} &\int_{I_N} \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{|K_j(x-t)|}{j+1} d\mu(t) \\ \leq\ & \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{cM_k M_l}{(j+1) j M_N} \\ \leq\ & \frac{cM_k M_l}{M_N} \sum_{j=M_N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \\ \leq\ & \frac{cM_k M_l}{M_N^2}. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

დავუშვათ $x \in I_N(x_k e_k)$, $1 \leq x_k \leq m_k - 1$, $k = 0, ..., N-1$. მაშინ

$$\begin{aligned} &\int_{I_N} \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{|K_j(x-t)|}{j+1} d\mu(t) \\ \leq\ & \sum_{j=M_N+1}^{n} \frac{cM_k}{(j+1) M_N} \\ \leq\ & \frac{cM_k}{M_N} l_n. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

(4.2.3)-ის და (4.2.4)-ის გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ ლემის დამტკიცებას. ■

ახლა დავამტკიცოთ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების გულებისთვის რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი. შემდეგ ლემაში მიღებული ტოლობა ასე დამტკიცებულია [39, 40]-შიც, მაგრამ ჩვენ აქ მოვიყვანთ მოკლე დამტკიცებასაც:

ლემა 4.3. *დავუშვათ* $n \in \mathbb{N}$. *მაშინ*

$$P_{M_n}(x) = D_{M_n}(x) - \psi_{M_n-1}(x)\overline{Y}_{M_n}(x) \tag{4.2.5}$$

უფრო მეტიც,

$$\|P_{M_n}(x)\|_1 < c < \infty. \tag{4.2.6}$$

დამტკიცება. (1.2.2)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} P_{M_n}(x) &= \frac{1}{Q_{M_n}}\sum_{k=1}^{M_n}\frac{D_k(x)}{M_n-k} = \frac{1}{Q_{M_n}}\sum_{k=0}^{M_n-1}\frac{D_{M_n-k}(x)}{k} \\ &= \frac{1}{Q_{M_n}}\sum_{k=0}^{M_n-1}\frac{1}{k}\left(D_{M_n}(x) - \psi_{M_n-1}(x)\overline{D}_k(x)\right) \\ &= D_{M_n}(x) - \psi_{M_n-1}(x)\overline{Y}_{M_n}(x). \end{aligned}$$

რომელიც ადასტურებს (4.2.5)-ის სამართლიანობას.

მეორეს მხრივ, თუ გავაერთიანებთ (1.2.6)-ს და ლემა 4.1-ის (4.2.2)-ს ასევე მივიღებთ (4.2.6)-ის დამტკიცებას. დამტკიცება დასრულებულია.

■

შემდეგი ლემის ანალოგი დირიხლეს გულისთვის დამტკიცებულია ტეფნაძის მიერ [142, 143]-ში:

ლემა 4.4. *ვთქვათ* $x \in I_s \backslash I_{s+1}, \quad s = 0, ..., N-1$. *მაშინ*

$$\int_{I_N} |P_n(x-t)|\, d\mu(t) \le \frac{cM_s}{M_N},$$

სადაც c *არის აბსოლუტური მუდმივი.*

დამტკიცება. დამტკიცება არის ლემა 2.1-ის პირდაპირი შედეგი. ასე რომ, ჩვენ დამტკიცების დეტალებს გამოვტოვებთ.

■

4.3 ჰარდის ტიპის უტოლობები ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების რისის ლოგარითმული საშუალოების H_p ნორმებისათვის

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია ლუკასენის, პერსონის, ტეფნაძის და თუთბერიძის [77] მიერ:

თეორემა 4.5. *დავუშვათ* $0 < p < 1/2$ *და* $f \in H_p(G_m)$. *მაშინ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი* c_p, *რომელიც დამოკიდებული მხოლოდ* p*-ზე ისეთი, რომ*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p n\,\|R_n f\|_{H_p(G_m)}^p}{n^{2-2p}} \le c_p\,\|f\|_{H_p(G_m)}^p \tag{4.3.1}$$

სადაც $R_n f$ *აღნიშნავს* f*-ის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების* n*-ურ რისის ლოგარითმულ საშუალოს.*

დამტკიცება. ლემა 4.1-ის (4.2.2) უტოლობის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{G_m}|Y_n a|\,d\mu\leq c<\infty.$$

და აქედან გამომდინარეობს, რომ R_n არის შემოსაზღვრული L_∞-დან L_∞-ში. ლემა 1.4-ის გათვალისწინებით, თეორემის დამტკიცებისთვის საკმარისი იქნება ვაჩვენებთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p n\int_I|R_n a|^p\,d\mu}{n^{2-2p}}\leq c_p<\infty,\quad\text{for }\ 0<p<1/2, \tag{4.3.2}$$

ყოველი p-ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს ატომის სუპორტს.

დავუშვათ a იყოს ნებისმიერი p-ატომი სუპორტით I, სადაც $\mu(I)=M_N^{-1}$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება დავუშვათ, რომ $I=I_N$. ადვილი სანახავია, რომ $R_n a=\sigma_n a=0$, როცა $n\leq M_N$. ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $n>M_N$.

p-ატომის განმარტების საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ $\|a\|_\infty\leq cM_N^{1/p}$. თუ გამოვიყენებთ (4.2.1) შეფასებას ლემა 4.1-ში შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\begin{aligned}
&|R_n a(x)| &(4.3.3)\\
=\ &\int_{I_N}|a(t)|\,|Y_n(x-t)|\,d\mu(t)\\
\leq\ &\|a\|_\infty\int_{I_N}|Y_n(x-t)|\,d\mu(t)\\
\leq\ &\frac{cM_N^{1/p}}{l_n}\int_{I_N}\sum_{j=M_N+1}^{n-1}\frac{|K_j(x-t)|}{j+1}d\mu(t)\\
+\ &\frac{cM_N^{1/p}}{l_n}\int_{I_N}|K_n(x-t)|\,d\mu(t).
\end{aligned}$$

ახლა დავუშვათ, რომ $x\in I_N(x_ke_k+x_le_l)$, $1\leq x_k\leq m_k-1$, $1\leq x_l\leq m_l-1$, $k=0,...,N-2$, $l=k+1,...,N-1$. ლემა 4.2-დან გამომდინარეობს, რომ

$$|R_n a(x)|\leq\frac{cM_lM_kM_N^{1/p-2}}{\log(n+1)}. \tag{4.3.4}$$

დავუშვათ $x\in I_N(x_ke_k)$, $1\leq x_k\leq m_k-1$, $k=0,...,N-1$. ლემა 4.2-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$|R_n a(x)|\leq M_N^{1/p-1}M_k. \tag{4.3.5}$$

(1.1.1)-ისა და (4.3.3-4.3.5) შეფასებების კომბინაციით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{I_N}}|R_n a(x)|^p\,d\mu(x) &(4.3.6)\\
=\ &\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\sum_{x_j=0,j\in\{l+1,...,N-1}^{m_{j-1}}\int_{I_N^{k,l}}|R_n a|^p\,d\mu\\
+\ &\sum_{k=0}^{N-1}\int_{I_N^{k,N}}|R_n a|^p\,d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{m_{l+1}\ldots m_{N-1}}{M_N}\frac{(M_lM_k)^p\,M_N^{1-2p}}{\log^p(n+1)}\\
&+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{M_N}M_k^pM_N^{1-p}\\
&\leq \frac{cM_N^{1-2p}}{\log^p(n+1)}\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{(M_lM_k)^p}{M_l}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{M_k^p}{M_N^p}\\
&= \frac{cM_N^{1-2p}}{\log^p(n+1)}\sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{M_k^{1-2p}}\sum_{l=k+1}^{N-1}\frac{M_k^{1-p}}{M_l^{1-p}}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{M_k^p}{M_N^p}\\
&\leq \frac{cM_N^{1-2p}}{\log^p(n+1)}+c_p.
\end{aligned}$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\sum_{n=M_N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2p}}\leq\frac{c}{M_N^{1-2p}},\quad \text{for}\quad 0<p<1/2. \tag{4.3.7}$$

(4.3.6)-ის და (4.3.7)-ის კომბინციით გვაქვს

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=M_N+1}^{\infty}\frac{\log^p n\int_{\overline{I_N}}|R_na|^p\,d\mu}{n^{2-2p}}\\
&\leq \sum_{n=M_N+1}^{\infty}\left(\frac{c_pM_N^{1-2p}}{n^{2-p}}+\frac{c_p}{n^{2-p}}\right)+c_p\\
&\leq c_pM_N^{1-2p}\sum_{n=M_N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2p}}\\
&+\sum_{n=M_N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-p}}+c_p\leq C_p<\infty.
\end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ (4.3.2) სამართლიანია და დამტკიცებაც დასრულებულია.

■

ჩვენი შემდეგი თეორემა, რომელიც ასევე დამტკიცებულია ლუკასენის, პერსონის, ტეფნაძის და თუთბერიძის [77] მიერ გვიჩვენებს, რომ თეორემა 4.5-ში არსებული უტოლობა განუზოგადებელია, სულ მცირე, უოლშ-ფურიეს მწკრივების შემთხვევაში.

თეორემა 4.6. *დავუშვათ $0<p<1/2$ და $\Phi:\mathbb{N}\to[1,\infty)$ არის ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n)=+\infty. \tag{4.3.8}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f\in H_p(G_2)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p n\,\|R_n^wf\|_p^p\,\Phi(n)}{n^{2-2p}}=\infty, \tag{4.3.9}$$

სადაც R_n^wf აღნიშნავს f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის n-ურ რისის ლოგარითმულ საშუალოებს.

დამტკიცება. ცხადია, თუ ვივარაუდებთ, რომ $\Phi\left(n\right)\geq cn$, სადაც c არის დადებითი მუდმივი, მაშინ

$$\frac{\log^{p}n\Phi\left(n\right)}{n^{2-2p}}\geq n^{1-2p}\log^{p}n\rightarrow\infty,\ \ \text{როცა}\ \ n\rightarrow\infty,$$

და ასევე (4.3.9) სამართლიანია. ამგვარად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ არსებობს დადებითი მთელი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k^{\prime}:k\in\mathbb{N}\}$ ისეთი, რომ

$$\Phi\left(\alpha_k^{\prime}\right)=o(\alpha_k^{\prime}),\quad \text{როცა}\ k\rightarrow\infty. \tag{4.3.10}$$

ახლა ვთქვათ $\{\alpha_k:k\in\mathbb{N}\}\subseteq\{\alpha_k^{\prime}:k\in\mathbb{N}\}$ იყოს დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ $\alpha_0\geq 2$ და

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}<\infty, \tag{4.3.11}$$

$$\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta/p}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\leq\frac{2^{2\alpha_{k-1}/p+1}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_{k-1}})}, \tag{4.3.12}$$

$$\frac{2^{2\alpha_{k-1}/p+1}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_{k-1}})}\leq\frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}. \tag{4.3.13}$$

შევნიშნოთ, რომ (4.3.10) პირობით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\frac{2^{2\alpha_\eta/p}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\geq\left(\frac{2^{2\alpha_\eta}}{\Phi(2^{2\alpha_\eta})}\right)^{1/2p}\rightarrow\infty,\ \text{როცა}\ \eta\rightarrow\infty$$

და აქედან ავტომატურად გამომდინარეობს, რომ შეიძლება აიგოს ისეთი ზრდადი მიმდევრობა $\{\alpha_k:k\in\mathbb{N}\}$, რომელიც აკმაყოფილებს (4.3.11)-(4.3.13) პირობებს.

ვთქვათ

$$f^{(n)}\left(x\right):=\sum_{\{k;\ 2\alpha_k<n\}}\lambda_k a_k,$$

სადაც

$$\lambda_k=\frac{1}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}$$

და

$$a_k=2^{2\alpha_k(1/p-1)}\left(D_{2^{2\alpha_k+1}}-D_{2^{2\alpha_k}}\right).$$

(4.3.11)-დან და ლემა 1.3-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $f=\left(f^{(n)},n\in\mathbb{N}\right)\in H_p(G_2)$.

ადვილი სანახავია, რომ

$$\widehat{f}^w(j)=\begin{cases}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})},\ \text{if}\ \ j\in\left\{2^{2\alpha_k},...,\ \ 2^{2\alpha_k+1}-1\right\},\ k\in\mathbb{N},\\ 0,\ \ \text{if}\ \ j\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{2^{2\alpha_k},...,\ \ 2^{2\alpha_k+1}-1\right\}.\end{cases} \tag{4.3.14}$$

ნატურალური რიცხვებისთვის $n=\sum\limits_{i=1}^{s}2^{n_i}$, სადაც $n_1<n_2<...<n_s$ ავღნიშნოთ

$$\mathbb{A}_{0,2}:=\left\{n\in\mathbb{N}:\ n=2^0+2^2+\sum_{i=3}^{s_n}2^{n_i}\right\}.$$

დავუშვათ $2^{2\alpha_k}\leq j\leq 2^{2\alpha_k+1}-1$ და $j\in\mathbb{A}_{0,2}$. მაშინ

$$R_j^wf \quad = \quad \frac{1}{l_j}\sum_{n=1}^{2^{2\alpha_k}-1}\frac{S_nf}{n}+\frac{1}{l_j}\sum_{n=2^{2\alpha_k}}^{j}\frac{S_nf}{n}:=I+II. \tag{4.3.15}$$

დავუშვათ $n<2^{2\alpha_k}$. მაშინ (4.3.12)-(4.3.14)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned}\left|S_n^wf(x)\right| &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\left|\widehat{f}^w(v)\right|\\ &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\\ &\leq \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta/p}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\\ &\leq \frac{2^{2\alpha_{k-1}/p+1}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_{k-1}})}\\ &\leq \frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}.\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე,

$$\begin{aligned}|I| &\leq \frac{1}{l_j}\sum_{n=1}^{2^{2\alpha_k}-1}\frac{\left|S_n^wf(x)\right|}{n}\\ &\leq \frac{1}{l_{2^{2\alpha_k}}}\frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\sum_{n=1}^{2^{2\alpha_k}-1}\frac{1}{n}\\ &\leq \frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}.\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

დავუშვათ, რომ $2^{2\alpha_k}\leq n\leq 2^{2\alpha_k+1}-1$. მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\begin{aligned}S_n^wf &= \sum_{\eta=0}^{k-1}\sum_{v=2^{2\alpha_\eta}}^{2^{2\alpha_\eta+1}-1}\widehat{f}^w(v)w_v+\sum_{v=2^{2\alpha_k}}^{n-1}\widehat{f}^w(v)w_v\\ &= \sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\left(D^w_{2^{2\alpha_\eta+1}}-D^w_{2^{2\alpha_\eta}}\right)\\ &+ \frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(D_n^w-D^w_{2^{2\alpha_k}}\right).\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
II &= \frac{1}{l_j}\sum_{n=2^{2\alpha_k}}^{2^{2\alpha_k+1}}\frac{1}{n}\left(\sum_{\eta=0}^{k-1}\frac{2^{2\alpha_\eta(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_\eta})}\left(D^w_{2^{2\alpha_\eta+1}}-D^w_{2^{2\alpha_\eta}}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\sum_{n=2^{2\alpha_k}}^{j}\frac{\left(D^w_n-D^w_{2^{2\alpha_k}}\right)}{n} \\
&:= II_1+II_2.
\end{aligned} \tag{4.3.17}
$$

ვთქვათ $x\in I_2(e_0+e_1)\in I_0\backslash I_1$. (1.6.8)-ის და (1.6.9)-ის გათვალისწინებით დავასკვნით

$$
D^w_n(x)=\begin{cases} w_n, & \text{თუ } n \text{ არის კენტი რიცხვი,} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ არის ლუწი რიცხვი.}\end{cases}
$$

მას შემდეგ, რაც $\alpha_0\geq 2,\quad k\in\mathbb{N}$ მივიღებთ, რომ $2\alpha_k\geq 4,$ ყოველი $k\in\mathbb{N}$-სთვის და თუ გამოვიყენებთ (1.6.8)-ს გვექნება

$$
II_1=0 \tag{4.3.18}
$$

და

$$
\begin{aligned}
II_2 &= \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\sum_{n=2^{2\alpha_k-1}}^{(j-1)/2}\frac{w_{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}r_1}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\sum_{n=2^{2\alpha_k-1}}^{(j-1)/2}\frac{w_{2n}}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

ვთქვათ, $x\in I_2(e_0+e_1)$. მაშინ უოლშის ფუნქციის განმარტებიდან გვაქვს

$$
w_{4n+2}=r_1w_{4n}=-w_{4n},
$$

საიდანაც

$$
\begin{aligned}
|II_2| &= \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left|\sum_{n=2^{2\alpha_k-1}}^{(j-1)/2}\frac{w_{2n}}{2n+1}\right| \\
&= \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left|\frac{w_{j-1}}{j}+\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\left(\frac{w_{4n-4}}{4n-3}+\frac{w_{4n-2}}{4n-1}\right)\right| \\
&= \frac{1}{l_j}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left|\frac{w_{j-1}}{j}+\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\left(\frac{w_{4n-4}}{4n-3}-\frac{w_{4n-2}}{4n-1}\right)\right| \\
&\geq \frac{c}{\log(2^{2\alpha_k+1})}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\left|\frac{w_{j-1}}{j}\right|-\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}|w_{4n-4}|\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)\right) \\
&\geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{1}{j}-\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.3.19}
$$

მარტივი გამოთვლებით შეგვიძლია დავასკვნათ

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right) \\
= & \sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{2}{(4n-3)(4n-1)} \\
\leq & \sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{2}{(4n-4)(4n-2)} \\
= & \frac{1}{2}\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{1}{(2n-2)(2n-1)} \\
\leq & \frac{1}{2}\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{1}{(2n-2)(2n-2)} \\
= & \frac{1}{8}\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{1}{(n-1)(n-1)} \\
\leq & \frac{1}{8}\sum_{n=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\frac{1}{(n-1)(n-2)} \\
= & \frac{1}{8}\sum_{l=2^{2\alpha_k-2}+1}^{(j-1)/4}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right) \\
\leq & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^{2\alpha_k-2}-1}-\frac{4}{j-5}\right) \\
\leq & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^{2\alpha_k-2}-1}-\frac{4}{j}\right).
\end{aligned}
$$

რადგან $2^{2\alpha_k}\leq j\leq 2^{2\alpha_k+1}-1$, როცა $\alpha_k\geq 2$ მივიღებთ

$$\frac{2}{2^{2\alpha_k}-4}\leq\frac{2}{2^4-4}=\frac{1}{6}$$

და

$$
\begin{aligned}
|II_2| & \geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^{2\alpha_k-2}-1}-\frac{4}{j}\right)\right) \\
& \geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{3}{2j}-\frac{1}{2^{2\alpha_k+1}-8}\right) \\
& \geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}-\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\alpha_k}-4}\right) \\
& \geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}-\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\alpha_k}-4}\right) \\
& = \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}-\frac{2}{2^{2\alpha_k}(2^{2\alpha_k}-4)}\right) \\
& \geq \frac{1}{4\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-1)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}-\frac{1}{6}\frac{1}{2^{2\alpha_k}}\right) \\
& \geq \frac{1}{48\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\geq\frac{1}{64\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}.
\end{aligned}
\tag{4.3.20}
$$

(4.1.2)-ისა და (4.3.15)-(4.3.20)-ის კომბინაციებით $x \in I_2(e_0+e_1)$-ისთვის და $0<p<1/2$-სთვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left|R_j^w f(x)\right| \\ \geq\ & |II_2|-|II_1|-|I| \\ \geq\ & \frac{1}{64\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}-\frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})} \\ =\ & \frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}. \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} & \left\|R_j^w f\right\|_{weak-L_p(G_2)}^p \\ \geq\ & \frac{1}{128\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}\mu\left\{x\in G_2:\left|R_j^w f\right|\geq\frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\right\}^{1/p} \\ \geq\ & \frac{1}{128\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}\mu\left\{x\in I_2(e_0+e_1):\left|R_j^w f\right|\geq\frac{1}{128\alpha_k}\frac{2^{2\alpha_k(1/p-2)}}{\Phi^{1/2p}(2^{2\alpha_k})}\right\} \\ \geq\ & \frac{1}{128\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}\left(\mu\left(x\in I_2(e_0+e_1)\right)\right) \\ >\ & \frac{1}{516\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

უფრო მეტიც,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\|R_j^w f\right\|_{weak-L_p(G_2)}^p\log^p(j)\Phi(j)}{j^{2-2p}} \\ \geq\ & \sum_{\left\{j\in\mathbb{A}_{0,2}:\ 2^{2\alpha_k}<j\leq 2^{2\alpha_k+1}-1\right\}}\frac{\left\|R_j^w f\right\|_{weak-L_p}^p\log^p(j)\Phi(j)}{j^{2-2p}} \\ \geq\ & \frac{c}{\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{p/2}(2^{2\alpha_k})}\sum_{\left\{j\in\mathbb{A}_{0,2}:\ 2^{2\alpha_k}<j\leq 2^{2\alpha_k+1}-1\right\}}\frac{\log^p(j)\Phi(j)}{j^{2-2p}} \\ \geq\ & \frac{c\Phi(2^{2\alpha_k})\log^p(2^{2\alpha_k})}{\alpha_k^p}\frac{2^{2\alpha_k(1-2p)}}{\Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})}\sum_{\left\{j\in\mathbb{A}_{0,2}:\ 2^{2\alpha_k}<j\leq 2^{2\alpha_k+1}-1\right\}}\frac{1}{j^{2-2p}} \\ \geq\ & \Phi^{1/2}(2^{2\alpha_k})\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty. \end{aligned}$$

დამტკიცება დასრულებულია.

■

შემდეგი თეორემის დამტკიცება არსებითად გამომდინარეობს რისის საშუალოების და ფეიერის საშუალოების მიმართებიდან. რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ფეიერის საშუალოების რაიმე აზრით კრებადობიდან გამომდინარეობს რისის საშუალოების იგივე აზრით კრებადობა. თეორემის პირველი ნა-

წილის დამტკიცება მოყვანილია [111], მეორე ნაწილის დამტკიცება კი გამომდინარეობს გოგინავას და გოგოლაძის [53] შედეგიდან, სადაც მათ განმარტეს ვილენკინ-ლებეგის წერტილები და დაამტკიცეს, რომ ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციისთვის თ.ყ. წერტილი არის ვილენკინ-ლებეგის წერტილი და $\sigma_n f(x) \to f(x)$ ნებისმიერი ვილენკინ-ლებეგის წერტილისთვის.

გადმოცემის სისრულის მიზნით ჩვენ მოვიყვანთ აღნიშნული თეორემის დამტკიცებასაც:

თეორემა 4.7. *დავუშვათ, რომ* $p \geq 1$ *და* $f \in L_p$*. მაშინ*

$$\|R_n f - f\|_p \to 0 \text{ როცა } n \to \infty \tag{4.3.22}$$

ყოველი $f \in L_p(G_m)$*-სთვის. უფრო მეტიც,*

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = f(x)$$

f*-ის ყველა ვილენკინ-ლებეგის წერტილებისთვის.*

დამტკიცება. აბელის გარდაქმნის გამოყენებით გვაქვს:

$$R_n = \frac{1}{l_n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sigma_j}{j+1} + \frac{\sigma_n}{l_n}. \tag{4.3.23}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ (დეტალებისთვის იხ. [180])

$$\|\sigma_n f - f\|_p \to 0 \text{ როცა } n \to \infty$$

თუ გამოვიყენებთ (4.3.23)-ს დაუყოვნებლივ მივიღებთ (4.3.22)-ის დამტკიცებას.

მეორეს მხრივ, რადგან (დეტალები იხ. [54])

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = f(x)$$

f-ის ყველა ვილენკინ-ლებეგის წერტილებისთვის, თუ ისევ გამოვიყენებთ (4.3.23) ტოლობას მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = f(x)$$

f-ის ყველა ვილენკინ-ლებეგის წერტილებისთვის.

■

4.4 ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში

შემდეგი თეორემა დამტკიცებულია ტეფნაძის და თუთბერიძის [164] მიერ:

თეორემა 4.8. *ა) ვთქვათ* $0 < p < 1$*. მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი*

$$\widetilde{L}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}$$

შემოსაზღვრულია ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში.

ბ) დავუშვათ, რომ $0 < p < 1$ და $\varphi : \mathbb{N}_+ \to [1,\infty)$ იყოს არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{1/p-1}}{\log n\varphi(n)} = +\infty. \tag{4.4.1}$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m)$ ისეთი, რომ მაქსიმალური ოპერატორი

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{\varphi(n+1)}$$

არ არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_p(G_m)$ სივრციდან ლებეგის $L_p(G_m)$ სივრცეში.

დამტკიცება. რადგან

$$\begin{aligned} &\frac{|L_n f|}{(n+1)^{1/p-1}} \\ \leq\ & \frac{1}{(n+1)^{1/p-1}} \sup_{1\leq k\leq n} |S_k f| \\ \leq\ & \sup_{1\leq k\leq n} \frac{|S_k f|}{(k+1)^{1/p-1}} \\ \leq\ & \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1}} \end{aligned}$$

და

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{(n+1)^{1/p-1}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1}} \tag{4.4.2}$$

მეორეს მხრივ, ტეფნაძემ [143]-ში (იხ.ასევე [145] და [148]) დაამტკიცა, რომ $0 < p < 1$-სთვის მაქსიმალური ოპერატორი

$$\widetilde{S}_p^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}$$

არის შემოსაზღვრული ჰარდის H_p სივრციდან ლებეგის L_p სივრცეში. ამრიგად, უტოლობა (4.4.2)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|L_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}\right\|_p \leq \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|S_n f|}{(n+1)^{1/p-1}}\right\|_p \leq c_p \|f\|_{H_p}.$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის ბ) ნაწილი. ვთქვათ

$$f_{n_k} = D_{M_{2n_k+1}} - D_{M_{2n_k}}.$$

ცხადია, რომ

$$\widehat{f}_{n_k}(i) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad i = M_{2n_k}, ..., M_{2n_k+1} - 1, \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases} \tag{4.4.3}$$

ამის გამოყენებით მივიღებთ

$$S_i f_{n_k} = \begin{cases} D_i - D_{M_{2n_k}}, & \text{თუ} \quad i = M_{2n_k} + 1, ..., M_{2n_k+1} - 1, \\ f_{n_k}, & \text{თუ} \quad i \geq M_{2n_k+1}, \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases} \tag{4.4.4}$$

(1.2.3)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned} & \|f_{n_k}\|_{H_p} \\ = & \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} S_{M_n} f_{n_k}\right\|_p \\ = & \left\|D_{M_{2n_k+1}} - D_{M_{2n_k}}\right\|_p \\ \leq & \left\|D_{M_{2n_k+1}}\right\|_p + \left\|D_{M_{2n_k}}\right\|_p \\ \leq & \; cM_{2n_k}^{1-1/p} < c < \infty. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

დავუშვათ, რომ $0 < p < 1$ და $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ იყოს დადებითი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k^{1/p-1}}{\varphi(\lambda_k)} = \infty.$$

ვთქვათ $\{n_k : k \in \mathbb{N}_+\} \subset \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(M_{2n_k} + 2\right)^{1/p-1}}{\log(M_{2n_k} + 2)\varphi(M_{2n_k+2})} \geq c \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k^{1/p-1}}{\varphi(\lambda_k)} = \infty.$$

(4.4.4)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ

$$\begin{aligned} & \left|\frac{L_{M_{2n_k}+2} f_{n_k}}{\varphi(M_{2n_k+2})}\right| \\ = & \frac{\left|D_{M_{2n_k}+1} - D_{M_{2n_k}}\right|}{l_{M_{2n_k}+1}\varphi(M_{2n_k+1})} \\ = & \frac{\left|\psi_{M_{2n_k}}\right|}{l_{M_{2n_k}+2}\varphi(M_{2n_k+1})} \\ = & \frac{1}{l_{M_{2n_k}+1}\varphi(M_{2n_k+2})}. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე,

$$\mu\left\{x \in G_m : \left|L_{M_{2n_k}+2} f_{n_k}\right| \geq \frac{1}{l_{M_{2n_k}+2}\varphi(M_{2n_k+2})}\right\} = \mu(G_m) = 1. \tag{4.4.6}$$

(4.4.5)-ის და (4.4.6)-ის კომბინაციით გვაქვს

$$\frac{\frac{1}{l_{M_{2n_k}+2}\varphi\left(M_{2n_k+2}\right)}\left(\mu\left\{x\in G_m:\quad\left|L_{M_{2n_k}+2}f_{n_k}\right|\geq\frac{1}{l_{M_{2n_k}+2}\varphi\left(M_{2n_k+2}\right)}\right\}\right)^{1/p}}{\|f_{n_k}\|_p}$$

$$\geq\quad\frac{M_{2n_k}^{1/p-1}}{l_{M_{2n_k}+2}\varphi\left(M_{2n_k+2}\right)}\geq\frac{c\left(M_{2n_k}+2\right)^{1/p-1}}{\log\left(M_{2n_k}+2\right)\varphi\left(M_{2n_k+2}\right)}\to\infty,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია. ■

შემდეგი შედეგი ასევე დამტკიცებულია ტეფნაძის და თუთბერიძის [164] მიერ:

თეორემა 4.9. *ვთქვათ* $0<p<1$ *და* $f\in H_p\left(G_m\right)$. *მაშინ არსობობს მხოლოდ* p-*ზე დამოკიდებული მუდმივი* c_p *ისეთი, რომ*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|L_kf\|_p^p}{k^{2-p}}\leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

დამტკიცება. ლემა 1.4-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დავამტკიცოთ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|L_ka\|_p^p}{k^{2-p}}\leq c_p<\infty.$$

ყოველი p ატომისთვის a, სუპორტით I_N და $\mu\left(I_N\right)=M_N^{-1}$. მას შემდეგ რაც $S_ka=0$, როცა $k\leq M_N$-თვის ასევე მივიღებთ, რომ $L_na=0$, $n\leq M_N$-თვის. ამგვარად, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ $n>M_N$.

დავუშვათ, რომ $x\in\overline{I_N}$ და $0<p<1$. (1.1.1)-ის და ლემა 4.4-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{\|L_ka\|_p^p}{k^{2-p}}\\
\leq&\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\overline{I_N}}\left|\frac{L_ka}{k^{1/p-1}}\right|^pd\mu\\
=&\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{N-1}\int_{I_s\setminus I_{s+1}}\left|\frac{L_ka}{k^{1/p-1}}\right|^pd\mu\\
\leq&\ c\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{N-1}\int_{I_s\setminus I_{s+1}}\left|\frac{M_N^{1/p-1}M_s}{k^{1/p-1}}\right|^pd\mu\\
\leq&\ c_pM_N^{1-p}\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k^{2-p}}\sum_{s=0}^{N-1}\int_{I_s\setminus I_{s+1}}M_s^p\\
\leq&\ c_pM_N^{1-p}\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k^{2-p}}\sum_{s=0}^{N-1}M_s^{p-1}d\mu\\
+&\ c_pM_N^{1-p}\sum_{k=M_N}^{\infty}\frac{1}{k^{2-p}}\leq c_p<\infty.
\end{aligned}$$

ამით დამტკიცება დასრულებულია. ■

შემდეგი თეორემის დამტკიცება პირველადაა მოყვანილი ამ სადოქტორო თეზისში:

თეორემა 4.10. *ვთქვათ* $p \geq 1$ *და* $f \in L_p$*. მაშინ*

$$\|L_{M_n} f - f\|_p \to 0 \text{ როცა } n \to \infty$$

ყოველი $f \in L_p(G_m)$*-თვის. უფრო მეტიც,*

$$\lim_{n \to \infty} L_{M_n} f(x) = f(x)$$

f *ფუნქციის ყველა ლებეგის წერტილისთვის.*

დამტკიცება. ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოს თ.ყ კრებადობის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ ლემა 4.3-ის პირველი ტოლობა, საიდანაც მივიღებთ

$$\begin{aligned} L_{M_n} f(x) &= \int_{G_m} f(t) P_n(x-t) \, d\mu(t) \\ &= \int_{G_m} f(t) D_{M_n}(x-t) \, d\mu(t) \\ &- \int_{G_m} f(t) \psi_{M_n - 1}(x-t) \overline{Y}_{M_n}(x-t) \\ &= I - II. \end{aligned}$$

(1.5.1)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$I = S_{M_n} f(x) \to f(x)$$

f ფუნქციის ყველა ლებეგის წერტილისთვის. (1.1.2)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ

$$II = \psi_{M_n - 1}(x) \int_{G_m} f(t) \overline{Y}_{M_n}(x-t) \overline{\psi}_{M_n - 1}(t) d(t)$$

1.5.1-ის, 4.2.6-ის და ლემა 4.3-ის კომბინაციებით ვხედავთ, რომ

$$f(t) \overline{Y}_{M_n}(x-t) \in L_p \quad \text{სადაც } p \geq 1 \text{ ნებისმიერი } x \in G_m,$$

და II არის ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი. რიმან-ლებეგის ლემის თანახმად, იგი მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$,

$$II \to 0 \text{ ყოველი } x \in G_m, \ n \to \infty.$$

დამტკიცება დასრულებულია. ■

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] *N. Antonov,* Convergence of Fourier series, East J. Approx, 2(2):187–196, 1996.

[2] *S. Astashkin and E. Semenov,* Lebesgue constants of the Walsh system and Banach limits, Siberian Mathematical Journal, 57(3):398–410, 2016.

[3] *M. Avdispahić and N. Memić,* On the Lebesgue test for convergence of Fourier series on unbounded Vilenkin groups, Acta Math. Hungar., 129 (2010), no. 4, 381-392.

[4] *G. N. Agaev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzhafarly and A. I. Rubinshtein,* Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups, Baku, Ehim, 1981 (in Russian).

[5] *L. Baramidze, L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* Srtong summability and Boundedness of Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-increasing coefficients, J. Inequal. Appl., 2016, DOI: 10.1186/s13660-016-1182-1.

[6] *L. Baramidze,* Uniform Convergence of Double Vilenkin-Fourier Series, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 54(3):147–156, 2019.

[7] *N. K. Bary,* Trigonometric series, Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moscow 1961.

[8] *I. Blahota,* Relation between Dirichlet kernels with respect to Vilenkin-like systems, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, XXII, 1994, 109-114.

[9] *K. Bitsadze,* On divergence of Fourier series with respect to multiplicative systems on the sets of measure zero, 2004

[10] *V. Bugadze,* On divergence of Fourier-Walsh series of bounded functions on sets of measure zero, *Matematicheskii Sbornik, 185(7):119–127, 1994.*

[11] *V. Bugadze.* Divergence of Fourier-Haar series of bounded functions on sets of measure zero, *Mathematical Notes, 51(5):437–441, 1992.*

[12] *K. Bitsadze,* On divergence of multiple Fourier-Walsh and Fourier-Haar series of bounded function of several variables on set of measure zero, *Georgian Mathematical Journal, 16(3):435–448, 2009.*

[13] *I. Blahota,* On the norm inequality with respect to Vilenkin-like systems, Acta Math. Hungar., 89 (1-2) (2000), 15-27.

[14] *I. Blahota, K. Nagy, L. E. Persson and G. Tephnadze,* A sharp boundedness result concerning some maximal operators of partial sums with respect to Vilenkin systems, Georgian Math., J., DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0045.

[15] *I. Blahota, K. Nagy and G. Tephnadze,* Approximation by Marcinkiewicz Θ-means of double Walsh-Fourier series, Math. Inequal. Appl., 22, 3 (2019) 837-853.

[16] *I. Blahota and G. Tephnadze,* Strong convergence theorem for Vilenkin-Fejér means, Publ. Math. Debrecen 85 (2014), no. 1-2, 181-196.

[17] *I. Blahota and G. Tephnadze,* A note on maximal operators of Vilenkin-Nörlund means, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhàzi. 32 (2016), 203–213.

[18] *I. Blahota, G. Tephnadze,* On the (C,α)-means with respect to the Walsh system, Anal. Math., 40 (2014), 161-174.

[19] *I. Blahota, G. Tephnadze and R. Toledo,* Strong convergence theorem of (C,α)-means with respect to the Walsh system, Tohoku Math. J., 67, 4 (2015), 573-584.

[20] *I. Blahota, L. E. Persson and G. Tephnadze,* On the Nörlund means of Vilenkin-Fourier series, Czechoslovak Math. J. 65, 4 (2015), 983-1002.

[21] *I. Blahota, L. E. Persson, G. Tephnadze,* Two-sided estimates of the Lebesgue constants with respect to Vilenkin systems and applications, Glasgow Math. J., (to appear).

[22] *I. Blahota and G. Gàt*, Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups, Anal. Theory Appl. 24 (2008), no. 1, 1-17.

[23] *I. Blahota, G. Gàt and U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of double Vilenkin-Fourier series, Colloq. Math. 107 (2007), no. 2, 287-296.

[24] *I. Blahota, G. Gàt and U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Pure Appl. Math. 7 (2006), no. 4, Article 149, 7 pp. (electronic).

[25] *S. Bochkarev,* Asolute convergence of Fourier series with respect to complete orthonormal systems, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 27(2):53–76, 1972.*

[26] *T. Chantladze, N. Kandelaki, and D. Ugulava,* Approximation of functions and measures on locally compact abelian groups, *In Proc. A. Razmadze Math. Inst, volume 140, pages 65–74, 2006.*

[27] *R. Coifman and G. Weiss,* Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), no. 4, 569-645.

[28] *D. Ugulava,* On the approximation of functions on locally compact Abelian groups, *Georgian Mathematical Journal, 6(4):379–394, 1999*

[29] *D. Ugulava,* Approximation of functions on locally compact Abelian groups, *Georgian Mathematical Journal, 19(1):181–193, 2012.*

[30] *Ch. Feferman, E. M. Stein,* H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.

[31] *L. Fejér,* Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, volume 28, pages 63–104, 1911.*

[32] *N. I. Fine,* On Walsh function, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 372-414.

[33] *S. Fridli,* Approximation by Vilenkin-Fourier sums, Acta Math. Hungar. 47 (1986), no. 1-2, 33-44.

[34] *S. Fridli,* On the rate of convergence of Cesàro means of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory 76 (1994), no. 1, 31-53.

[35] *S. Fridli, P. Manchanda and A.H. Siddiqi,* Approximation by Walsh-Nörlund means, Acta Sci. Math.(Szeged) 74 (2008), no. 3-4, 593-608.

[36] *N. J. Fujii,* A maximal inequality for H^1 -functions on a generalized Walsh-Paley group, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), no. 1, 111-116.

[37] *G. Gàt,* Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems, J. Approx. Theory 124 (2003), no. 1, 25-43.

[38] *G. Gàt,* Investigations of certain operators with respect to the Vilenkin system, Acta Math. Hungar. 61 (1993), no. 1-2, 131-149.

[39] *G. Gàt and U. Goginava,* Uniform and L-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Sin. 22 (2006), no. 2, 497-506.

[40] *G. Gàt and U. Goginava,* On the divergence of Nörlund logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Math. Sin. 25 (2009), no. 6, 903-916.

[41] *G. Gát,* Best approximation by Vilenkin-like systems, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. 17 (2001), no. 3, 161-169.

[42] *G. Gát, U. Goginava and G. Tkebuchava,* Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series, J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), no. 1, 535–549.

[43] *G. Gát and K. Nagy,* On the logarithmic summability of Fourier series, Georgian Math. J. 18 (2011), no. 2, 237–248.

[44] *N. Gogolashvili, K. Nagy and G. Tephnadze,* Strong convergence theorem for Walsh-Kaczmarz-Fejér means, Mediterr. J. Math., (to appear).

[45] *U. Goginava,* The maximal operator of the (C,α) means of the Walsh-Fourier series, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 26 (2006), 127–135.

[46] *U. Goginava,* Maximal operators of logarithmic means of one-dimensional Walsh-Fourier series, Rend. del Circ. Mat. di Paler. Ser. II, 82(2010), 345-357.

[47] *U. Goginava,* On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory 115 (2002), no. 1, 9–20.

[48] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér means of double Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 115 (2007), no. 4, 333-340.

[49] *U. Goginava,* Maximal operators of Fejér-Walsh means, Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), no. 3-4, 615-624.

[50] *U. Goginava,* The maximal operator of the Fejér means of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement, Publ. Math. Debrecen 71 (2007), no. 1-2, 43-55.

[51] *U. Goginava,* On the uniform convergence of Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 93 (2001), no. 1-2, 59-70.

[52] *U. Goginava,* On the approximation properties of partial sums of Walsh-Fourier series, Acta Sci. Math. (Szeged) 72 (2006), no. 3-4, 569-579.

[53] *U. Goginava and L. D. Gogoladze,* Pointwise summability of Vilenkin-Fourier series, Publ. Math. Debrecen, Vol 79, 1-2 (2011), 89-108

[54] *U. Goginava and L. D. Gogoladze,* Strong convergence of cubic partial sums of two-dimensional Walsh-Fourier series, Constructive theory of functions, Prof. M. Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 2012, 108-117.

[55] *U. Goginava and K. Nagy,* On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejér means, Czechoslovak Math. J. 61 (136) (2011), no. 3, 673-686.

[56] *U. Goginava and G. Tkebuchava,* Convergence of subsequences of partial sums and logarithmic means of Walsh-Fourier series, Acta Sci. Math. (Szeged) 72 (2006), no. 1-2, 159-177.

[57] *L. D. Gogoladze,* On the strong summability of Fourier series, Bull of Acad. Scie. Georgian SSR, 52, 2 (1968), 287-292.

[58] *L. Gogoladze and V. Tsagareishvili,* Some classes of functions and Fourier coefficients with respect to general orthonormal systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 280(1):156–168, 2013.*

[59] *L. Gogoladze and V. Tsagareishvili,* Summability of general Fourier series, *Publicationes Mathematicae Debrecen, 91(3-4):391–402, 2017.*

[60] *J. A. Gosselin,* Almost everywhere convergence of Vilenkin-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 185 (1973), 345-370.

[61] *B. I. Golubov, A. V. Efimov* and *V. A. Skvortsov,* Walsh series and transforms, (Russian) Nauka, Moscow, 1987, English transl: Mathematics and its Applications, 64. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[62] *N. V. Guliéev,* Approximation to continuous functions by Walsh-Fourier sums, Anal. Math. 6 (1980), no. 4, 269-280.

[63] *G. H. Hardy, J.E. Littlewood,* Some new properties of Fourier constants, J. London Math. Soc. 6 (1931), 3-9.

[64] *I. Joo,* On some problems of M. Horváth, Ann. Univ. Sci. Budapest. E?tv?s Sect. Math. 31 (1988), 243–260.

[65] *J.-P. Kahane* Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, *Studia Math., 26:305–306, 1966.*

[66] *Y. Kryakin, W. Trebels,* q- moduli of continuity in $H_p(D)$, $p>0$, and a inequality of Hardy and Littlewood, J. Approx. Theory, 115, 238-259, (2002).

[67] *Y. Katznelson,* Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques,*Studia Mathematica, 26(3):301, 1966.*

[68] *G. Karagulyan,* Divergence of general operators on sets of measure zero GA Karagulyan, *Colloq. Math, volume 121, pages 113–119, 2010*

[69] *G. Karagulyan,* Everywhere divergent Φ-means of Fourier series, *Mathematical Notes, 80(1-2) :47–56, 2006.*

[70] *B. Kashin and A. Saakyan,* Orthogonal series, volume 75. American Mathematical Soc., 2005.

[71] *S. Kheladze* On everywhere divergence of Fourier series with respect to bounded type Vilenkin systems, Trudy Tbiliss, *Mat. Inst. Gruzin. SSR, 58:225–242, 1978.*

[72] *S. Kheladze* On the everywhere divergence of Fourier-Walsh series, *Soobsch. Akad. Nauk Gruz, 77:305–307, 1975.*

[73] *R. H. Later,* A characterization of in terms of atoms, Studia Math., 62 (1978) 92-101.

[74] *H. Lebesgue,* Sur les intégrales singulières, *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, volume 1, pages 25–117, 1909*

[75] *S. F. Lukomskii,* Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional abelian group, East J. Approx. 15 (2009), no. 2, 219–231.

[76] *Y. Malykhin, S. Telyakovskii, and N. Kholshchevnikova,* Integrability of the sum of absolute values of blocks of the Fourier-Walsh series for functions of bounded variation, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 290(1):306–317, 2015.

[77] *D. Lukkassen, L.E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze,* Some inequalities related to strong convergence of Riesz logarithmic means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Appl., (to appear).

[78] *N. Memić, I. Simon, G. Tephnadze,* Strong convergence of two-dimensional Vilenkin-Fourier series, Math. Nachr., 289, 4 (2016) 485–500.

[79] *N. Memić, L. E. Persson and G. Tephnadze,* A note on the maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-increasing coefficients, Stud. Sci. Math. Hung., 53, 4, (2016) 545-556.

[80] *C. N. Moore,* Summable series and convergence factors, Dover Publications, Inc., New York 1966.

[81] *F. Móricz and A. Siddiqi*, Approximation by Nörlund means of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory 70 (1992), no. 3, 375–389.

[82] *K. Nagy,* Approximation by Cesàro means of negative order of Walsh-Kaczmarz-Fourier series, East J. Approx. 16 (2010), no. 3, 297-311.

[83] *K. Nagy,* Approximation by Nörlund means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series, Anal. Math. 36 (2010), no. 4, 299-319.

[84] *K. Nagy,* Approximation by Nörlund means of Walsh-Kaczmarz-Fourier series, Georgian Math. J. 18 (2011), no. 1, 147-162.

[85] *K. Nagy,* Approximation by Nörlund means of double Walsh-Fourier series for Lipschitz functions, Math. Inequal. Appl. 15 (2012), no. 2, 301-322.

[86] *K. Nagy, G. Tephnadze,* Approximation by Walsh-Kaczmarz-Marcinkiewicz means on the Hardy space $H_{2/3}$, Bulletin of TICMI, 18, 1 (2014), 110–121.

[87] *K. Nagy and G. Tephnadze,* On the Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space, Cent. Eur. J. Math., 12, 8 (2014), 1214-1228.

[88] *K. Nagy and G. Tephnadze,* Approximation by Walsh-Marcinkiewicz means on the Hardy space , Kyoto J. Math., 54, 3 (2014), 641-652.

[89] *K. Nagy and G. Tephnadze,* Kaczmarz-Marcinkiewicz means and Hardy spaces, Acta math. Hung., 149, 2 (2016), 346-374.

[90] *K. Nagy and G. Tephnadze,* Strong convergence theorem for Walsh-Marcinkiewicz means, Math. Inequal. Appl., 19, 1 (2016), 185–195.

[91] *J. Neveu,* Discrete-parameter martingales, North-Holland Mathematical Library, Vol. 10. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.

[92] *A. Olevskii,* Orthogonal series in terms of complete systems, *Matematicheskii Sbornik, 100(2):707–748, 1962.*

[93] *C.W. Onneweer,* On L_1-convergence of Walsh-Fourier series, Internat. J. Math. Math. Sci. 1 (1978), no. 1, 47-56.

[94] *C. Onneweer and D. Waterman,* Uniform convergence of Fourier series on groups. I. *The Michigan Mathematical Journal, 18(3):265–273, 1971*

[95] *C. Onneweer,* Uniform convergence of Fourier series on groups. II, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1(4):623–631, 1971.*

[96] *G. Oniani,* Divergence of Fourier Series with Respect to Systems of Products of Bases, *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci, 6(3), 2012.*

[97] *P. Oswald,* On some approximation properties of real Hardy spaces $(0 < p \leq 1)$, J. approx. Theory, 40, 45-65 (1984).

[98] *A. Paley,* A Remarkable Series of Orthogonal Functions (II), Proc. London Math. Soc. 22-34 no. 1, 265.

[99] *J. Pál and P. Simon,* On a generalization of the concept of derivative, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29 (1977), no. 1-2, 155-164.

[100] *L.-E. Persson, F. Schipp, G. Tephnadze, and F. Weisz* An analogy of the Carleson-Hunt theorem with respect to Vilenkin systems, (to appear)

[101] *L. E. Persson, G. Tephnadze and G. Tutberidze,* On the boundedness of subsequences of Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy spaces, operators and matrices, V. 14, no 1, (2020), 283–294.

[102] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, P. Wall, Strong summability result of Vilenkin-Fejér means on bounded Vilenkin groups, Ukr. Math. J., (to appear).

[103] *L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* On an approximation of two-dimensional Walsh-Fourier series in the martingale Hardy spaces, Ann. Funct. Anal., 9, 1 (2018), 137-150.

[104] *L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means, J. Fourier Anal. Appl., 21, (2015), no. 1, 76-94.

[105] *L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* On the Nörlund logarithmic means with respect to Vilenkin system in the martingale Hardy space H_1, Acta math. Hung., 154, 2 (2018) 289-301.

[106] *L. E. Persson, G. Tephnadze and P. Wall,* Some new (H_p, L_p) type inequalities of maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-decreasing coeficients, J. Math. Inequal. (to appear).

[107] *L. E. Persson and G. Tephnadze,* A note on Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy space H_p, Bulletin of TICMI, Vol. 18, (2014), no. 1, 55–64.

[108] *L. E. Persson and G. Tephnadze,* A sharp boundedness result concerning some maximal operators of Vilenkin-Fejér means, Mediterr. J. Math., 13, 4 (2016) 1841-1853.

[109] *L. E. Persson and G. Tephnadze,* Some inequalities for Cesàro means of double Vilenkin–Fourier series, Journal of inequalities and applications, 2018(1):352, 2018.

[110] *F. Schipp,* Certain rearrangements of series in the Walsh system, 18 (1975), no. 2, 193–201.

[111] *F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál,* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.

[112] *A. Schneider,* On series with respect to Walsh functions with monotone coefficients, *Izvestija Akad, Nauk SSSR, Ser. Matem, 12:179–192, 1948.*

[113] *A. A. Shneider,* On convergence of Fourier-Walsh series, Math. Sbornik 34, (1954), no. 3, 441-472.

[114] *P. Simon,* Cesaro summability with respect to two-parameter Walsh systems, Monatsh. Math. 131 (2000), no. 4, 321-334.

[115] *P. Simon,* Investigations with respect to the Vilenkin system, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 27 (1984), 87-101.

[116] *P. Simon,* Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series, Acta Math. Hungar. 49 (1987), no. 3-4, 425-431.

[117] *P. Simon,* Cesàro summability with respect to two-parameter Walsh systems, *Monatshefte für Mathematik, 131(4):321–334, 2000.*

[118] *P. Simon,* A note on the Sunouchi operator with respect to Vilenkin system, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 43 (2000), 101-116.

[119] *P. Simon,* Strong convergence theorem for Vilenkin-Fourier series, J. Math. Anal. Appl. 245 (2000), no. 1, 52-68.

[120] *P. Simon,* Paley type inequalities for Two-parameter Vilenkin system, Math. Panonica, 10 (1999), no. 1, 49-60.

[121] *S. Stechkin* On the convergence and divergence of trigonometric series, *Uspekhi Mat. Nauk, 6(2):148–149, 1951.*

[122] *P. Simon and F. Weisz,* Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory 151 (2008), no. 1, 1-19.

[123] *P. Simon and F. Weisz,* Paley type inequalities for Vilenkin-Fourier coefficients, Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1997), no. 1-2, 107-124.

[124] *P. Simon and F. Weisz,* Hardy-Littlewood type inequalities for Vilenkin-Fourier coefficients, Anal. Math., 24, (1998), 1, 131–150.

[125] *P. Simon and F. Weisz,* Hardy-Littlewood inequalities for two-parameter Vilenkin-Fourier coefficients, Analysis, 21, (2001), 1, 1-15.

[126] *P. Simon and F. Weisz,* Hardy type inequalities for two-parameter Vilenkin-Fourier coefficients, Stud. Math., 125, (1997), 3, 231-246.

[127] *P. Simon and F. Weisz,* Paley Type Inequalities for Several Parameter Vilenkin Systems, Anal. Math., 27, (2001), 3, 187–199.

[128] *P. Simon and F. Weisz,* Two-parameter Paley type inequalities with respect to Vilenkin system, Acta Sci. Math. (Szeged) 66, (2000), 1-2, 193-209.

[129] *B. Smith,* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series, *Arkiv for Matematik ¨ , 9(1-2):65–90, 1971.*

[130] *B. Smith,* A strong convergence theorem for $H_1(T)$, Lecture Notes in Math.995, Springer, Berlin, 1994, 169-173.

[131] *E, A. Storozenko,* Approximation of functions of the class $H^p, \quad 0<p<1,$ Mat. Sb. 105 (149) (1978), 601-621. [Russian].

[132] *E, A. Storozenko,* On approximation of functions of the class $H^p, \quad 0<p<1,$ Soobsc. Akad. Nauk Gruz., SSR 88 (1977), 45-48. [Russian].

[133] *O. Szasz,* On the logarithmic means of rearranged partial sums of a Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 705–711.

[134] *G. Szego.* Über die Lebesgueschen konstanten bei den Fourierschen reihen, Mathematische Zeitschrift, 9(1-2):163–166, 1921.

[135] *G. Tephnadze,* The One-dimensional Martingale Hardy Spaces and Partial Sums and Fejér Means with respect to Walsh system, (to appear)

[136] *G. Tephnadze,* On the Partial Sums and Marcinkiewicz and Fejér Means on the One-and Two-dimensional One-parameter Martingale Hardy Spaces, PhD thesis, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, 2016.

[137] *G. Tephnadze,* Fejér means of Vilenkin-Fourier series, Studia Sci. Math. Hungar. 49 (2012), no. 1, 79-90.

[138] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejér means, Turkish J. Math. 37 (2013), no. 2, 308-318.

[139] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Vilenkin-Fejér means on Hardy spaces, Math. Inequal. Appl. 16 (2013), no. 1, 301-312.

[140] *G. Tephnadze,* A note on the Fourier coefficients and partial sums of Vilenkin-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhàzi. 28 (2012), no. 2, 167–176.

[141] *G. Tephnadze,* Strong convergence theorems for Walsh-Fejér means, Acta Math. Hungar. 142 (2014), no. 1, 244–259.

[142] *G. Tephnadze,* A note on the norm convergence by Vilenkin-Fejér means, Georgian Math. J. 21 (2014), no. 4, 511-517.

[143] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Vilenkin-Fourier series, J. Contemp. Math. Anal. 49 (2014), no. 1, 23-32.

[144] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Kaczmarz-Nörlund means, Acta Math. Acad. Paed. Nyíreg., 31 (2015), 259–271.

[145] *G. Tephnadze,* On the Vilenkin-Fourier coefficients, Georgian Math. J. 20 (2013), no. 1, 169-177.

[146] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Riesz logarithmic means of Vilenkin-Fourier series, Studia Sci. Math. Hungar. 51 (2014), no. 1, 105–120.

[147] *G. Tephnadze,* The maximal operators of logarithmic means of one-dimensional Vilenkin-Fourier series, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. 27 (2011), no. 2, 245-256.

[148] *G. Tephnadze,* Martingale Hardy Spaces and Summability of the One Dimensional Vilenkin-Fourier Series, PhD thesis, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Luleå University of Technology, Oct. 2015 (ISSN 1402-1544).

[149] *G. Tephnadze,* On the convergence of Fejér means of Walsh-Fourier series in the space H_p, J. Contemp. Math. Anal., 51, 2 (2016), 51-63.

[150] *G. Tephnadze,* On the convergence of partial sums with respect to Vilenkin system on the martingale Hardy spaces, J. Contemp. Math. Anal., 53 (2018), no 5, 294–306.

[151] *G. Tephnadze,* Approximation by Walsh-Kaczmarz-Fejér means on the Hardy space, Acta Math. Sci., 34 (2014), no 5, 1593-1602.

[152] *G. Tephnadze,* Convergence and Strong Summability of the Two-dimensional Vilenkin-Fourier Series, Nonlinear Studies, 26, 4, (2019) 973-989.

[153] *G. Tephnadze,* On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloq. Math., 141, 2 (2015), 227-242.

[154] *G. Tephnadze,* On the maximal operators of Walsh-Kaczmarz-Fejér means, Period. Math. Hung., 67, 1 (2013), 33-45.

[155] *G. Tephnadze,* Strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series, Ukr. Math. J., 65, 6 (2013), 822-834.

[156] *G. Tephnadze,* A note on the strong convergence of two-dimensional Walsh-Fourier series, Proc. Razmadze Math. Inst., 162 (2013), 93-97.

[157] G. Tephnadze, A note on strong summability of two-dimensional Walsh-Fourier series, Georgian Math., J., (to appear).

[158] *A. Torchinsky,* Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Dover Books on Mathematics, 2008.

[159] *V. Tsagareishvili and G. Tutberidze,* Multipliers of absolute convergence, Mathematical Notes, 105(3-4):439–448, 2019.

[160] *G. Tutberidze,* A note on the strong convergence of partial sums with respect to Vilenkin system, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 54(6):319–324, 2019.*

[161] *G. Tutberidze,* Modulus of continuity and boundedness of subsequences of Vilenkin-Fejér means in the martingale Hardy spaces, Georgian Math. J., (to appear).

[162] *G. Tutberidze,* Maximal operators of T means with respect to the Vilenkin system, *Nonlinear Studies, 27(4):1–11, 2020.*

[163] *G. Tutberidze,* Sharp (H_p, L_p) type inequalities of maximal operators of T means with respect to Vilenkin systems with monotone coefficients, *Mediterranean Journal of Mathematics, (to appear).*

[164] *G. Tutberidze and G. Tephnadze,* A note on The maximal operators of the Nörlund logaritmic means of Vilenkin-Fourier series, Proc. Razmadze Math. Inst.,Vol. 174, issue 1, 107–112, 2020.

[165] *N. Ya. Vilenkin,* On a class of complete orthonormal systems, (Russian) Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. 11, (1947), 363-400.

[166] *C. Watari,* Best approximation by Walsh polynomials, Tóhoku Math. J. 15 (1963), no. 2, 1-5.

[167] *C. Watari,* On generalized Walsh-Fourier series, Tóhoku Math. J., (2) 10 (1958), 211-241.

[168] *F. Weisz,* (C, α) summability of Walsh-Fourier series, Anal. Math. 27 (2001), 141-156.

[169] *F. Weisz*, Hardy-Littlewood inequalities for Ciesielski-Fourier series, Anal. Math. 31 (2005), no. 3, 217–233.

[170] *F. Weisz,* Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series, Studia Math. 117 (1996), no. 2, 173–194.

[171] *F. Weisz,* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis, Lecture Notes in Mathematics, 1568. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[172] *F. Weisz,* Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces,volume 541. Springer Science & Business Media, 2013.

[173] *F. Weisz,* Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series, Approximation theory and function series (Budapest, 1995), 353–367, Bolyai Soc. Math. Stud., 5, J?nos Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[174] *F. Weisz,* Cesàro summability of one- and two-dimensional Walsh-Fourier series, Anal. Math. 22 (1996), no. 3, 229-242.

[175] *F. Weisz,* Weak type inequalities for the Walsh and bounded Ciesielski systems, Anal. Math. 30 (2004), no. 2, 147-160.

[176] *F. Weisz,* Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces, Mathematics and its Applications, 541. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[177] *F. Weisz,* Inequalities relative to two-parameter Vilenkin-Fourier coefficients, Stud. Math, 99 (1991), no. 3, 221-233.

[178] *J. M. Wilson,* A simple proof of the atomic decomposition for $H_p\,(R_n)\quad 0 < p \leq 1,$ Studia Math., 74 (1982) 25-33.

[179] *K.Yabuta,* Quasi-Tauberian theorems, applied to the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means, Tóhoku Math. J. 22 (1970), no.2, 117–129.

[180] *S.H. Yano,* Cesàro summability of Walsh-Fourier series, Tóhoku Math. J. 9 (1957), no. 2, 267-272.

[181] *W. S. Young,* Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 218 (1976), 311-320.

[182] *W.-S. Young,* Almost everywhere convergence of Vilenkin-Fourier series of H^1 functions, *Proceedings of the American Mathematical Society, 108(2):433–441, 1990.*

[183] *W.-S. Young,* On an estimate of the partial sums of Vilenkin-Fourier, *Canadian Mathematical Bulletin, 34(3):426–432, 1991.*

[184] *W.-S. Young,* Almost everywhere convergence of lacunary partial sums of Vilenkin-Fourier series, *Proceedings of the American Mathematical Society, 124(12):3789–3795, 1996.*

[185] *L. Zhizhiashvili,* Integrability of majorants connected with multiple Fourier series, *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, 125:469–471, 1987.*

[186] *A. Zygmund,* Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II, Cambridge University Press, New York 1959.