„საქართველოს უნივერსიტეტი“

მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლა

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი თუთბერიძე

შემოსაზღვრული ოპერატორები ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი ნაშრომის

სადისერტაციო მაცნე

(სპეციალობა - ___ - მათემატიკა)

თბილისი

2021

ჰარდის სივრცეები

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს უნივერსიტეტის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლაში.

სადისერტაციო საბჭოს შემადგენლობა:

თავმჯდომარე -

სამეცნიერო ხელმძღვანელი - მეცნიერ-თანამშრომელი გიორგი ტეფნაძე

თანახელმძღვანელები - პროფესორი ლარს-ერიკ პერსონი, პროფესორი დაგ ლუკასენი

გარე ექსპერტი - პროფესორი დუგლას უგულავა

გარე ექსპერტი - პროფესორი გიორგი ონიანი

გარე ექსპერტი - პროფესორი პაატა ივანიშვილი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2021 წლის 23 აპრილს, 17:00 საათზე

მისამართზე: თბილისი, კოსტავას 77ა, #519 აუდიტორია.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება საქართველოს უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში

სადისერტაციო მაცნე დაიგზავნა 2021 წლის 23 მარტს

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი, სადოქტორო საფეხურისა და საკვალიფიკაციო ნაშრომების მენეჯერი - ნათია მანჯიკაშვილი

ჰარდის სივრცეები

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება:

პრობლემატიკა, რომლის დამუშავებასაც ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვა და სხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას. დამტკიცებულია არაერთი შესანიშნავი შედეგი კვლევის ისეთ ახალ მიმართულებებში, როგორებიცაა ვეივლეტ ანალიზი, გაბორის თეორია, დროით-სიხშირული ანალიზი, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნი, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი და ა.შ. ამის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიზეზია ის, რომ ეს სამეცნიერო წინსვლა მნიშვნელოვანია არა მხოლოდ ამ თეორიების განსავითარებლად, არამედ მათი გამოყენების მხრივ მათემატიკაში, პროგრამირებასა და სხვადასხვა სფეროებში. (მაგალითად, სიგნალის გადაცემის თეორია, მულტიპლექსირება, ფილტრაცია, სურათის გაუმჯობესება, კოდირების თეორია, ციფრული სიგნალის დამუშავება და ნიმუშების ამოცნობა და ა.შ.).

ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიიის გამოყენებით ფუნქციის იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, ვილინკინის (უოლშის) ფუნქციები წარმოადგენენს "მართკუთხა ტალღებს". ასეთი ტალღები უკვე ხშირად გამოიყენება ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, მედიცინაში, სიგნალთა გადაცემის თეორიაში, ფილტრაციის, გამოსახულების გაუმჯობესების და ციფრული სიგნალების დამუშავებისთვის. ამ მიმართულებების განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი გახდა ახალი ორთონორმირებული სისტემების განხილვა, რომელთა შორის ერთ-ერთი აქტუალურია უოლშის სისტემა. ეს ფუნქციები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, რაც აადვილებს თეორიული შედეგების კომპიუტერულ ალგორითმიზაციას და მათ პრაქტიკაში გამოყენებებს.

ჰარდის სივრცეები

ვილინკინ-ფურიეს მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას. ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები, რომელთა თვისებები ძირითადად განპირობებულია ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. უოლშის სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზეც შეიძლება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულების ილუსტრირება.

ნაშრომის თეორიული ღირებულება

საკვლევი მიზნების გათვალისწინებით, ფართოდ იქნა გამოყენებული ნამდვილი ანალიზი და ასევე აბსტრაქტული და არაწრფივი ჰარმონიული ანალიზი, აპროქსიმაციის თეორიასთან ერთად. სხვა კვლევის მეთოდები მოიცავს ფუნქციათა სივრცეების თეორიას. ჩვენი მიმართულების უმთავრესი თეორემა არის მარტინგალური ჰარდის სივრცეების დეკომპოზიცია.

სადოქტორო ნაშრომი მოიცავს ოთხ თავს:

1) შესავალი,
2) კერძო ჯამები და ფეიერის საშუალოები H_p სივრცეში,
3) ვილინკინ-ფურიეს მწკრივების T საშუალოები H_p სივრცეში,
4) რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშალოები H_p სივრცეში.

პირველი თავი შეიცავს ძირითად ფაქტებს ვილინკინის ჯგუფების და ფუნქციების შესახებ, ასევე კერძო ჯამების ფეირეის საშუალოების, რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების, ნორლუნდის და T საშუალოების განმართებებს და საბაზისო თვისებებს, ამ თავში ასევე განხლილულია, ლებეგის და სუსტი ლებეგის სივრცეები და მარტინგალური ჰარდის სივრცეები.

მეორე თავი ეძღვნება ვილინკინის სისტემის მიმართ კერძო ჯამების და ფეიერის საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის

ტიპის უტოლობების შესწავლას. შემდეგ დამტკიცებული იქნება ფეიერის საშუალოების ქვემიმდევრობების H_p სივრცეში კრებადობის საკითხები. ამის შემდეგ, ეს შედეგები გამოყენებული იქნება, რათა უწყვეტობის მოდულებისთვის ვიპოვოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლთათვისაც სამართლიანია ფეიერის საშუალოების ნორმით კრებადობა. ასევე, ამ თავში დამტკიცებული იქნება ამ ძირითადი შედეგების გაუზოგადებლობა.

მესამე თავში განხილული იქნება ვილინკინის სისტემების მიმართ T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა. ასევე დამტკიცებული იქნება ამ შედეგების განუზოგადებლობა. ამის შემდეგ, განხილული იქნება ამ საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები. მას შემდეგ რაც ფეიერის და რისის საშუალოები არის T საშუალოების კარგად ცნობილი მაგალითები, კერძო შემთხვევებში მიიღება ამ საშუალოებისთვის უკვე ცნობილი და ახალი შედეგები.

მეოთხე თავში განხილული იქნება რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოები ვილინკინის სისტემებისთვის. კერძოდ, დავამტკიცებთ ვილინკინის სისტემებისთვის რისის საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობებს. უფრო მეტიც, დავამტკიცებთ ამ შედეგების სიზუსტეს მხოლოდ უოლშ-ფურიეს სისტემისთვის. შემდეგ, შევისწავლით ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობას. ასევე, ზოგიერთ შემთხვევაში შევისწავლით ამ საშუალოების და მათი ქვემიმდევრობების თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხებს ინტეგრებად ფუნქციათა ლებეგის სივრცეში.

დისერტაციის თემასთნ დაკავშირებული პუბლიკაციების ნუსხა:

ჰარდის სივრცეები

[1] G. Tutberidze, A note on the strong convergence of partial sums with respect to Vilenkin system, J. Contemp. Math. Anal., 54, 6, (2019), 319–324.

[2] G. Tutberidze, Maximal operators of T means with respect to the Vilenkin system, Nonlinear Studies, 27, 4, (2020), 1–11.

[3] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, On the boundedness of subsequ ences of Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy spaces, Operators and Matrices, 14, 1 (2020), 283–294.

[4] G. Tephnadze, G. Tutberidze, A note on the maximal operators of the Nörlund logaritmic means of Vilenkin-Fourier series, Trans. of A. Razmadze Math. Inst., 174, 1 (2020), 107–112.

[5] D. Lukkassen, L.E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, Some inequalities related to strong convergence of Riesz logarithmic means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Appl., 2020, DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-020-02342-8.

[6] G. Tutberidze, Modulus of continuity and boundedness of subsequences of Vilenkin- Fej\'er means in the martingale Hardy spaces, Georgian Math. J., (to appear).

[7] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, P. Wall, Strong summability result of Vilenkin-Fejér means on bounded Vilenkin groups, Ukr. Math. J., (to appear).

კვლევის სიახლე და ინოვაციურობა

ვთქვათ $m:=\left(m_k, k\in N\right)\left(N:=\left\{0,1,...\right\}, P:=N\setminus\{0\}\right)$ არის ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, პირობით $\left\{m_k\geq 2: k\in N\right\}$. განვიხილოთ დისკრეტული ჯგუფი $Z_{m_k}=\left\{0,1,..., m_k-1\right\}$ $\mathrm{mod}\left(m_k\right)$ შეკრების ოპერაციის მიმართ. G_m-თი ავღნიშნოთ ამ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი $G_m:=\underset{k=0}{\overset{\infty}{\times}} Z_{m_k}$. ცხადია ყოველი

ჰარდის სივრცეები

$x \in G_m$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით $x = \left(x_i, i \in N\right)$, სადაც $x_i \in Z_{m_i}\left(i \in N\right)$. მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი i-ური კოორდინატების $\mathrm{mod}\left(m_i\right)$ ჯამი. სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილინკინის ჯგუფებს, რაც ნიშნავს, რომ შესრულებულია პირობა $\sup_{n\in N} m_n < \infty$. კერძო შემთხვევაში, როცა ყველა $m_k = 2\left(k \in N\right)$, მაშინ G_m ემთხვევა უოლშის ჯგუფს.

განვმარტოთ ე.წ. განზოგადებული ხარისხები $M_0 = 1, M_{n+1} := m_n M_n \left(n \in N\right)$. მაშინ ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის $n \in N$ -თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i, \quad \left(n_i \in \{0,1,\ldots,m_i - 1\} \quad i \in N\right),$$

სადაც მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\langle n \rangle := \min\left\{ j \in N : n_j \neq 0 \right\} \text{ და } |n| := \max\left\{ j \in N : n_j \neq 0 \right\}.$$

ყოველი $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i$ -თვის განვსაზღვროთ

$$\delta_i = sign(n_i) = sign(m_i - n_i), \;\; \delta_i^* = \left|m_i - n_i - 1\right| \delta_i.$$

რადემახარის n-ური განზოგადებული ფუნქცია G_m ჯგუფზე განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$r_n\left(x\right) := \exp\left(2\pi\left(x_n / m_n\right)\right), \; \left(x \in G_m \quad n \in N \quad i := \sqrt{-1}\right).$$

განვსაზღვროთ n-ური ვილინკინის ფუნქცია, როგორც

$$\psi_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j} \quad \left(n \in N\right).$$

$\psi := \left(\psi_n : n \in N\right)$ სისტემას ეწოდება ვილინკინის სისტემა.

ჰარდის სივრცეები

$L_p(G_m)$ და $weak-L_p(G_m)$ სივრცეების ნორმები (ნახევრად-ნორმები) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\|f\|_{L_p(G_m)}^p := \int_{G_m} |f(x)|^p \, d\mu(x),$$

$$\|f\|_{weak-L_p(G_m)}^p := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(x \in G_m : |f(x)| > \lambda\right), \quad (0 < p < +\infty).$$

ვილინკინ-ფურიეს მწკრივის ერთგანზომილებიანი მართკუთხოვანი კერძო ჯამები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$S_N(f;x) := \sum_{j=0}^{N_1-1} f_j(x)\psi_j(x)$$

სადაც რიცხვებს

$$f_j := \int_{G_m} f(x)\psi_j(x) d\mu(x)$$

f ფუნქციის j-ური ვილინკინ-ფურიეს კოეფიციენტი ეწოდება. განვმარტოთ ფეიერის საშუალო და მაქსიმალური ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j f, \quad \sigma^* f := \sup_{n\in N} |\sigma_n f|.$$

ვთქვათ $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივების n-ური ნორლუნდის საშუალო, ნორლუნდის გული, T საშუალო და T საშუალოს გული განიმარტება შესაბამისად:

$$t_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \quad T_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1} q_k S_k f, \quad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k$$

ნორლუნდისა და T საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$t^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n f|, \quad T^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f|.$$

ჰარდის სივრცეები

ნორლუნდის და რისისა ლოგარითმული საშუალოები და მათი მაქსიმალური ოპერატორები განიმარტება შემდეგნაირად:

$$L_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{n-k}, \quad R_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k f}{k}, \quad l_n := \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

და

$$L^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n f\right|, \qquad R^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|R_n f\right|.$$

σ-ალგებრა განსაზღვრული

$$I_n\left(x\right) := \left\{y\in G : y = \left(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1}\right)\right\}$$

სიმრავლეებით ავღნიშნოთ $F_k\left(k\in N\right)$-თი. მარტინგალი $F_k\left(k\in N\right)$ ნაკადის მიმართ ავღნიშნოთ $f = \left(f_n : n\in N\right)$-ით. ჰარდის მარტინგალური სივრცე $H_p\left(G_m\right)$ $(0<p<\infty)$ შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p(G_m)} := \left\|f^*\right\|_{L_p(G_m)} < \infty, \quad f^* = \sup\nolimits_{n\in N}\left|f^{(n)}\right|.$$

უწყვეტობის მოდული $H_p\left(G_m\right)$ ($0<p<\infty$) სივრცეებში განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\omega_{H_p(G_m)}\left(1/M_k, f\right) := \left\|f - S_{M_k} f\right\|_{H_p(G_m)}.$$

სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ ერთგანზომილებიან ჰარდის მარტინგალურ სივრცეები.

კვლევის მეთოდოლოგია:

ნაშრომი არის თეორიული ხასიათის, რომელიც ეხება ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებზე სხვადასხვა ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხებს. დასმული ამოცანების გადასაჭრელად განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჰარდის მარტინგალური სივრცეების დეკომპოზიცია მარტივი ფუნქციების

საშუალებით, რომელსაც ატომებს უწოდებენ და რომელიც ჰარდის სივრცეების ახალ დახასიათებას გვაძლევს.

ვიტყვით, რომ შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება $p-$ატომი, თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

$$\int_{G_m} a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p}, \quad Supp(a) \subset I.$$

ვეისმა მოგვცა $H_p(G_m)$ სივრცეების დახასიათება:

ლემა 1. მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G_m)$ $(0 < p \le 1)$ სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $(a_k, k \in N)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $(\mu_k, k \in N)$ ისეთი, რომ ყოველი $n \in N$-თვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{M_n}(a_k) = f^{(n)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty. \tag{0.1}$$

უფრო მეტიც,

$$\|f\|_{H_p(G_m)} \approx \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p \right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო (0.1) წარმოდგენებს შორის.

ამ თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ:

ლემა 2. ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია, რომელიც შემოსაზღვრულია $L_\infty(G_m)$-დან $L_\infty(G_m)$-ში. თუ $0 < p \le 1$-თვის

$$\int_{G_m / I} |Ta(x)|^p d\mu(x) \le c_p < \infty,$$

ჰარდის სივრცეები

ყოველი p-ატომისთვის a, სადაც I აღნიშნავს p-ატომ a-ს სუპორტს, მაშინ

$$\|Tf\|_{L_p(G_m)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G_m)}.$$

კვლევითი თემის აქტუალობა

როგორც ცნობილია, ერთგანზომილებიანი ვილინკინის სისტემა არ ქმნის ბაზისს $L_1(G_m)$ სივრცეში. უფრო მეტიც, არსებობს ფუნქცია $H_p(G_m)$ სივრცეში, ისეთი რომ

$$\sup_{n\in N}\|S_n f\|_{L_p(G_m)} = \infty, \quad (0 < p \leq 1).$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ თუ $f \in H_p(G_m) \quad (0 < p \leq 1)$

და

$$\omega_{H_p(G_m)}(1/M_k, f) = o\left(1/(M_k^{1/p-1}\log^{[p]} k)\right), \text{ როცა } \quad k \to \infty,$$

მაშინ

$$\|S_n f - f\|_{L_p(G_m)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

სადაც $[p]$ აღნიშნავს p ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილს.

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m), \quad (0 < p \leq 1)$ ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G_m)}(f, 1/M_n) = O\left(1/\left(M_n^{1/p-1}\log^{[p]} n\right)\right), \quad \text{როცა } \ n \to \infty$$

და

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n f - f\|_{L_p(G_m)} > c > 0.$$

შიმონმა განიხილა ერთგანზომილებიანი ვილინკინ-ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები (ეს პრობლემები ლიტერატურაში ძლიერად კრებადობის სახელითცაა ცნობილი) და დაამტკიცა, რომ არსებობს

აბსოლუტური მუდმივი c_p, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ p -ზე ისეთი, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

(1.1) $$\frac{1}{\log^{[p]} n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\|S_k f\right\|_{L_p(G_m)}}{k^{2-p}} \le c_p \left\|f\right\|_{H_p(G_m)}, \quad f \in H_p(G_m), \quad (n = 2,3\ldots).$$

უფრო მეტიც, ტეფნაძემ აჩვენა, რომ მიმდევრობა $\left\{1/k^{2-p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (1.1)-ში არის განუზოგადებელი.

ვეისმა დაამტკიცა, რომ ერთგანზომილებიანი მარცინკევიჩ-ფეიერის საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი σ^* შემოსაზღვრულია $H_{1/2}(G_m)$-დან weak-$L_{1/2}(G_m)$ -ში. ბლაჰოტა, გატი და გოგინავას მიერ ნაჩვენები იქნა, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_{1/2}(G_m)$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in N}\left\|\sigma^* f\right\|_{L_p(G_m)} = \infty.$$

ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ თუ $0 < p \le 1/2$ და

$$\omega_{H_p(G_m)}(1/M_k, f) = o\left(1/\left(M_k^{1/p-2}\log^{2[p+1/2]} k\right)\right),$$

როცა $k \to \infty$, მაშინ

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G_m)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G_m)$, ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G_m)}\left(f, 1/M_n\right) = O\left(1/(M_n^{1/p-2}\log^{2[p+1/2]} n)\right),$$

როცა $n \to \infty$ და

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G_m)} > c > 0.$$

ბლაჰოტამ და ტეფნაძემ დაამტკიცეს, რომ თუ $0 < p \le 1/2$, მაშინ

(1.2) $$\frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{n=1}^{n}\frac{\left\|\sigma_k f\right\|_{L_p(G_m)}^p}{k^{2-2p}} \le c_p \left\|f\right\|_{H_p(G_m)}^p,$$

ჰარდის სივრცეები $f \in H_p\left(G_m\right),\left(n=2,3,...\right),$ უფრო მეტიც, როცა $0<p<1/2$ მიმდევრობა $\left\{1/k^{2-2p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (1.2)-ში არის განუზოგადებელი.

ტეფნაძემ დაამტკიცა, რომ რისის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი R^* არის შემოსაზღვრული ჰარდის $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში. უფრო მეტიც, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p,$ სადაც $0<p\leq 1/2,$ ისეთი, რომ

$$\left\|R^* f\right\|_p=+\infty.$$

გოგინავამ აჩვენა, რომ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p,$ $(0<p\leq 1)$ ისეთი, რომ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორი L^* არ არის შემოსაზღვრული ლებეგის L_p სივრცეში. კერძოდ, არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\left\|L^* f\right\|_p=+\infty\,.$$

ჰარდის მარტინგალურ სივრცეებში t_n და T_n საშუალოების მაქსიმალური ოპერატორების და წონიანი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობა და ამ საშუალოების H_p ნორმების ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები განხილულია მემიჩის, პერსონის, ტეფნაძის, ვალის და სხვა ავტორების შრომებში.

კვლევის მიზნები და ამოცანები

აქ ჩვენ მოვიყვანთ იმ ძირითად შედეგებს, რომლებიც მიღებულია ჩემს მიერ და წარმოადგენს სადოქტორო ნაშრომის ძირითად თეორემებს.

ვილინკინ-ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამებისთვის დავამტკიცეთ:

თეორემა 1: ა) დავუშვათ $f \in H_1.$ მაშინ

ჰარდის სივრცეები

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left\|S_k f\right\|_1\leq c\left\|f\right\|_{H_1}.$$

ბ) თუ $\varphi:\mathbb{N}_+\to[1,\infty)$ არის არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\log n/\varphi_n\right)=+\infty,$ მაშინ არსებობს $f\in H_1$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\varphi_n}\sum_{k=1}^{n}\left\|S_k f\right\|_1=\infty.$$

ვილინკინ-ფეიერის საშუალოებისთვის დავამტკიცეთ შემდეგი:

თეორემა 2: **ა)** ვთქვათ $f\in H_{1/2}$. მაშინ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\sigma_k f\right\|_{1/2}^{1/2}\leq c\left\|f\right\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

ბ) ისევე, როგორც თეორემა 1-ში, დამტკიცებულია $\log n$ რიგის განუზოგადებლობის საკითხი.

თეორემა 3: **ა)** ვთქვათ $f\in H_p\left(G_m\right)$ $\left(0<p<1/2\right)$ და $n=\sum_{i=0}^{r}n_iM_i,\quad n_i=0,1,\dots,m_i-1.$ მაშინ

(2.1) $$\left\|\sigma_n f\right\|_{H_p}\leq c_p\left(M_{|n|}/M_{\langle n\rangle}\right)^{1/p-2}\left\|f\right\|_{H_p}.$$

ბ) დავადგინეთ (2.1) პირობის არსებითობის საკითხი.

თეორემა 4: ვთქვათ $0<p<1/2$, $f\in H_p\left(G_m\right)$ და

(2.2) $$\omega_{H_{1/2}(G_m)}\left(f,1/M_{|\alpha_k|}\right)=o\left(\left(M_{\langle\alpha_k\rangle}/M_{|\alpha_k|}\right)^{1/p-2}\right),\quad k\to\infty,$$

მაშინ

$$\left\|\sigma_{\alpha_k}f-f\right\|_{H_{1/2}(G_m)}\to 0,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty.$$

დადგენილი იქნა (2.2) პირობის არსებითობის საკითხი:

თეორემა 5: ვთქვათ $0 < p < 1/2,$ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p\left(G_m^2\right),$ ისეთი, რომ

$$\omega_{H_p(G_m)}\left(f, 1/M_{|\alpha_k|}\right) = O\left(\left(M_{\langle\alpha_k\rangle}/M_{|\alpha_k|}\right)^{1/p-2}\right), \quad \text{როცა} \quad n \to \infty$$

და

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\sigma_{\alpha_k} f - f\right\|_{weak-L_p(G_m)} > c > 0.$$

T საშუალოებისთვის დავამტკიცეთ შემდეგი:

თეორემა 6: **ა)** არაზრდადი $\{q_k : k \geq 0\}.$ მიმდევრობით წარმოქმნილი T შეჯამებადობის მეთოდის T^* მაქსიმალური ოპერატორი არის შემოსაზღვრული $H_{1/2}$ სივრციდან $weak-L_{1/2}$ სივრცეში.

ბ) ვთქვათ $0 < p < 1/2$ და $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$q_{n+1}/Q_{n+2} \geq c/n, \ \left(\mathrm{c} \geq 1\right).$$

მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p$ ისეთი, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|T_n f\right\|_{weak-L_p} = \infty.$$

თეორემა 7: განხილულია ანალოგიური თეორემები როცა $0 < p < 1/2, \ f \in H_p$ და $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

(2.4) $$q_{n-1}/Q_n = O\left(1/n\right), \ \mathrm{n} \to \infty.$$

თეორემა 8: **ა)** ვთქვათ $0 < p < 1/2, \ f \in H_p$ და $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა. მაშინ სამართლიანია:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|T_k f\right\|_p^p}{k^{2-2p}} \leq c_p \left\|f\right\|_{H_p}^p .$$

ბ) ვთქვათ $f \in H_{1/2}$ და $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაზრდადი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს $1/Q_n = O(1/n), \mathrm{n} \to \infty$ პირობას. მაშინ

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|T_k f\|_{1/2}^{1/2}}{k} \leq c\|f\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

თეორემა 9: განხილულია ანალოგიური ტიპის ახალი ჰარდის ტიპის უტოლობები, როცა $0 < p < 1/2,\ \ f \in H_p$ და $\{q_k : k \geq 0\}$ არის არაკლებადი მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (2.4) პირობას.

რისის და ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოებისთვის დავამტკიცეთ შემდეგი უტოლობები:

თეორემა 10: ა) დავუშვათ $0 < p < 1/2$ და $f \in H_p(G_m).$ მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p n\|R_n f\|_{H_p(G_m)}^p}{n^{2-2p}} \leq c_p\|f\|_{H_p(G_m)}^p.$$

ბ) დავუშვათ $0 < p < 1/2$ და $\Phi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$. არის ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty}\Phi(n) = +\infty.$ მაშინ არსებობს მარტინგალი $f \in H_p(G)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^p n\|R_n f\|_p^p\,\Phi(n)}{n^{2-2p}} = \infty.$$

თეორემა 11: ვთქვათ $0 < p < 1$ და $f \in H_p(G_m).$ მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|L_k f\|_p^p}{k^{2-p}} \leq c_p\|f\|_{H_p}^p.$$

ჰარდის სივრცეები

General description

The classical Fourier Analysis has been developed in an almost unbelieved way from the first fundamental discoveries by name Fourier. Especially a number of wonderful results have been proved and new directions of such research has been developed e.g. concerning Wavelets Theory, Gabor theory, Time-Frequency Analysis, Fast Fourier Transform, Abstract Harmonic Analysis, etc. One important reason for this is that this development is not only important for improving the "State of the art", but also for its importance in other areas of mathematics and also for several applications (e.g. theory of signal transmission, multiplexing, filtering, image enhancement, coding theory, digital signal processing and pattern recogni-tion).

The classical theory of Fourier series deals with decomposition of a function into sinusoidal waves. Unlike these continuous waves the Vilenkin (Walsh) functions are rectangular waves. The development of the theory of Vilenkin-Fourier series has been strongly influenced by the classical theory of trigonometric series. Because of this it is inevitable to compare results of Vilenkin series to those on trigonometric series. There are many similarities between these theories, but there exist differences also. Much of these can be explained by modern abstract harmonic analysis, which studies orthonormal systems from the point of view of the structure of a topological group.

Scientific value

This PhD thesis deals with boundedness of some operators on the martingale Hardy spaces. The central theorem in our direction is decomposition of martingale Hardy spaces.
The thesis contains four chapters:

1) Preliminaries,
2) Partial sums and Fejer means on H_p spaces,
3) T means of Vilenkin-Fourier series on martingale Hardy spaces,
4) Reisz and Norlund logarithmoic means means on H_p spaces.

ჰარდის სივრცეები

In Chapter 1 we first present some definitions, notations and basic facts about Vilenkin groups and systems, which are crucial for our further investigations. After that we also define partial sums and Fejer means, Riesz and Norlund logarithmic means, Norlund and T means with respect to Vilenkin systems and investigate their basic properties. Moreover, we define Lebesgue and weak-Lebesgue spaces and martingale Hardy spaces.

Chapter 2 is devoted to investigate some new Hardy type inequalities for H_p norms of partial sums and Fej\'er means with respect to Vilenkin systems. Next, we prove convergence of subsequences of Fejer means in H_p norm. After that we apply these results to find necessary and sufficient conditions for the modulus of continuity for which norm convergence of Fejer means hold. We also prove sharpness of all our main results in this Chapter.

In Chapter 3 we consider boundedness of maximal operators of T means with respect to Vilenkin systems. We also prove that results are sharp in the special sense. After that we prove some new Hardy type inequalities for H_p norms of these summablility methods. Since Fejer means, Riesz means are well-know examples of T means some well-known and new results are pointed out in these special cases.

In Chapter 4 we consider Riesz and Norlund logarithmic means with respect to Vilenkin systems. In particular, we prove some new Hardy type inequalities for H_p norms of Riesz means with respect to Vilenkin systems. Moreover, we also prove sharpness of this result for only Walsh-Fourier series. Next, we investigate boundedness of maximal operators of Norlund logarithmic means. In the special cases, we also investigate a.e. convergence of subsequences these means in the Lebesgue space of integrable functions.

ჰარდის სივრცეები

Publications

[1] G. Tutberidze, A note on the strong convergence of partial sums with respect to Vilenkin system, J. Contemp. Math. Anal., 54, 6, (2019), 319–324.

[2] G. Tutberidze, Maximal operators of T means with respect to the Vilenkin system, Nonlinear Studies, 27, 4, (2020), 1–11.

[3] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, On the boundedness of subsequ ences of Vilenkin-Fejér means on the martingale Hardy spaces, Operators and Matrices, 14, 1 (2020), 283–294.

[4] G. Tephnadze, G. Tutberidze, A note on the maximal operators of the Nörlund logaritmic means of Vilenkin-Fourier series, Trans. of A. Razmadze Math. Inst., 174, 1 (2020), 107–112.

[5] D. Lukkassen, L.E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, Some inequalities related to strong convergence of Riesz logarithmic means of Vilenkin-Fourier series, J. Inequal. Appl., 2020, DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-020-02342-8.

[6] G. Tutberidze, Modulus of continuity and boundedness of subsequences of Vilenkin- Fej\'er means in the martingale Hardy spaces, Georgian Math. J., (to appear).

[7] L. E. Persson, G. Tephnadze, G. Tutberidze, P. Wall, Strong summability result of Vilenkin-Fejér means on bounded Vilenkin groups, Ukr. Math. J., (to appear).

Novelty and uniqueness of the research

Let $m:=(m_k, k\in N)\left(N:=\{0,1,...\}, P:=N\setminus\{0\}\right)$ be a sequence of integers, each of them not less than 2. Let denote the discrete group $Z_{m_k}:=\{0,1,...,m_k-1\}$ with the mod m_k addition as the group operation. Let $G_m:=\mathop{\times}\limits_{k=0}^{\infty} Z_{m_k}$. Then every $x\in G_m$ can be represented by a sequence $x=(x_i, i\in N)$ where $x_i\in Z_{m_i}\,(i\in N)$. The group operation on G_m is the coordinate-wise addition. In this PhD thesis we discuss only bounded Vilenkin groups, that is $\sup_{n\in N} m_n < \infty$. We note that, if $m_k = 2\left(k \in N\right)$, then G_m coincides with the Walsh group.

Let $M_0 = 1, M_{n+1} := m_n M_n \left(n \in N\right)$ be the so-called gene-generalized powers. Then each natural number $n \in N$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i \ \left(n_i \in \{0,1,\ldots,m_i - 1\}, i \in N\right)$, where only a finite number of n_i differ from zero.

Set $|n| := \max\{j \in N, n_j = 0\}, \langle n \rangle := \min\{j \in N, n_j = 0\}$. For every $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i$ we define

$$\delta_j = sign\left(n_j\right) = sign\left(-n_j\right), \delta_j^* = \left|-n_j - 1\right| \delta_j .$$

The n th generalized Rademacher functions on G_m are defined by $r_n(x) := \exp(2\pi(x_n / m_n)) \quad \left(x \in G_m \quad n \in N \quad i := \sqrt{-1}\right)$.

The n th Vilenkin function is defined as $\psi_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j}, \left(n \in N\right)$.

The system $\psi := \left(\psi_n : n \in N\right)$ is called a Vilenkin system.

The norms (or quasi-norms) of the spaces $L_p\left(G_m\right)$ and $weak - L_p\left(G_m\right)$ are respectively defined by

$$\| f \|_{L_p(G_m)}^p := \int_{G_m} | f(x)|^p \, d\mu(x),$$

$$\| f \|_{weak-L_p(G_m)}^p := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(x \in G_m : \left| f\left(x\right)\right| > \lambda\right), \quad (0 < p < +\infty).$$

The partial sums of Vilenkin-Fourier series are defined as follows:

$$S_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n-1} f_j\left(x\right) \psi_j\left(x\right)$$

where the number $f_j := \int_{G_m} f(x)\psi_j(x)\,d\mu(x)$ is said to be the j^{th} Vilenkin-Fourier coefficient of the function f.

The Fejér means and it`s maximal operator with respect to Vilenkin-Fourier series are defined as follows:

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j f, \quad \sigma^* f := \sup_{n\in N} |\sigma_n f|.$$

Let $\{q_k : k \geq 0\}$ be a sequence of nonnegative numbers. The n-th Norlund means, T means and kernel of T means of Vilenkin-Fourier series of f is defined by

$$t_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} S_k f, \quad T_n f := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1} q_k S_k f, \quad Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} q_k$$

The maximal operators of T and Norlund means defined by:

$$t^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n f|, \quad T^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f|.$$

The n-th Norlund logarithmic mean, the Riesz logarithmic mean and their maximal operators are defined by

$$L_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k f}{n-k}, \quad R_n f := \frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k f}{k}, \quad l_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

and

$$L^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n f|, \qquad R^* f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |R_n f|.$$

The σ-algebra generated by the sets

$$I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1})\}$$

will be denoted by $F_k\,(k \in N)$. Denote by $f = (f_n : n \in N)$ a one-parameter martingale with respect to $F_k\,(k \in N)$. For $0 < p < \infty$, the Hardy martingale space $H_p(G_m)$ consist of all martingales for which

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_{L_p} < \infty, \text{where} \quad f^* = \sup_{n\in N}\left|f^{(n)}\right|.$$

The concept of modulus of continuity in $H_p(G_m),(0<p<\infty)$ is defined by

$$\omega_{H_p(G_m)}(1/M_k, f) := \left\|f - S_{M_k} f\right\|_{H_p(G_m)}.$$

Research methodology

According to the proposal aims and problems, methods of real analysis combined with methods of abstract and non-linear harmonic analysis together with theory of approximation will be widely used. Other research methods include theory of function spaces and inequalities.

A function a is a p-atom, if there exists an interval I, such that

$$\int_{G_m} a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-/p}, \quad \sup p(a) \subset I.$$

Weisz gave us a description of the space $H_p(G_m)$:

Lemma 1: A martingale $f = (f_n, n\in N)$ is in $H_p(G_m)$ $(0<p\le 1)$ if and only if there exist a sequence $(a_k, k\in N)$ of $p-$ atoms and a sequence $(\mu_k, k\in N)$ of real numbers such that, for every $n\in N$,

$$(0.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k S_{M_n}(a_k) = f^{(n)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p < \infty.$$

Moreover, $\|f\|_{H_p(G_m)} \approx \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\mu_k|^p\right)^{1/p}$, where infimum is taken over all decomposition of f the form of (0.1).

Using this theorem we can conclude:

Lemma 2: Suppose that an operator T is sub-linear and for some $0<p\le 1$

$$\int_{(G_m\backslash I)} |Ta(x)|^p d\mu(x) \le c_p < \infty,$$

for every p-atom a, where I denotes the support of the atom. If T is bounded from L_∞ to L_∞, then

$$\|Tf\|_{L_p(G_m)} \leq c_p \|f\|_{H_p(G_m)}.$$

Research Actuality

It well known that Vilenkin systems do not form bases in the space $L_1(G_m)$. Moreover, there exists a martingale in the Hardy space $H_p(G_m)$, such that

$$\sup_{n\in N} \|S_n f\|_{L_p(G_m)} = \infty, \quad (0 < p \leq 1).$$

Tephnadze proved that if $f \in H_p(G_m)$ $(0 < p \leq 1)$ and

$$\omega_{H_p(G_m)}(1/M_k, f) = o(1/(M_k^{1/p-1} \log^{[p]} k)), \quad \text{as} \quad k \to \infty,$$

then

$$\|S_n f - f\|_{L_p(G_m)} \to 0, n \to \infty$$

where [p] denotes integer part of p. Moreover, there exists a martingale $f \in H_p(0 < p \leq 1)$, for which

$$\omega_{H_p(G_m)}(f, 1/M_n) = O(1/(M_n^{1/p-1} \log^{[p]} n)), \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

and $S_n f$ do not converges to f in H_p norm.

Simon considered Hardy type inequalities for H_p norms of the one-dimensional Vilenkin-Fourier series (in the literature such theorems is also called strong convergence results) and proved that there exists an absolute constant c_p, depending only on p, such that

$$(1.1) \frac{1}{\log^{[p]} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_{L_p(G_m)}}{k^{2-p}} \leq c_p \|f\|_{H_p(G_m)}, f \in H_p(G_m), (n = 2,3\ldots)$$

Moreover, Thepnadze proved that for sequence $\left\{1/k^{2-p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ in inequality (1.1) is sharp.

Weisz proved that maximal operator of Fejér means σ^* is bounded from $H_{1/2}(G_m)$ to weak-$L_{1/2}(G_m)$. In Blahota, Gát and Goginava proved that, there exists a martingale $f \in H_{1/2}(G_m)$, such that

$$\sup_{n\in N}\left\|\sigma^* f\right\|_{L_p(G_m)} = \infty.$$

Tephnadze proved that if $0 < p \le 1/2$ and

$$\omega_{H_p(G_m)}(1/M_k, f) = o\left(1/\left(M_k^{1/p-2}\log^{2[p+1/2]} k\right)\right), \quad \text{as } k \to \infty,$$

then

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G_m)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Moreover, there exists a martingale $f \in H_p(G_m)$, such that

$$\omega_{H_p(G_m)}(f, 1/M_n) = O\left(1/(M_n^{1/p-2}\log^{2[p+1/2]} n)\right), \quad \text{as } n \to \infty$$

and

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\sigma_n f - f\right\|_{L_p(G_m)} > c > 0.$$

Blachota and Tephnadze proved that if $0 < p \le 1/2$, then

$$(1.2) \qquad \frac{1}{\log^{[1/2+p]} n}\sum_{n=1}^{n}\frac{\left\|\sigma_k f\right\|_{L_p(G_m)}^p}{k^{2-2p}} \le c_p \left\|f\right\|_{H_p(G_m)}^p,$$

$f \in H_p(G_m)$, $(n = 2, 3, \ldots)$. Moreover, when $0 < p < 1/2$ sequence $\left\{1/k^{2-2p}\right\}_{k=1}^{\infty}$ in (1.2) cannot be improved.

Tepnadze proved that the maximal operators of Reisz logarithmic mean does not bounded from the space $H_{1/2}$ to the space $weak - L_{1/2}$. Moreover, there there exist a martingale $f \in H_p$, where $0 < p \le 1/2$, such that

$$\left\| R^{*} f \right\|_{p} = +\infty.$$

Goginava proved that there there exist a martingale $f \in H_{p}$, such that the maximal operators of Norlun logarithmic mean does not bounded in the space L_{p}. Particular, there there exist a martingale $f \in H_{p}$, such that

$$\left\| L^{*} f \right\|_{p} = +\infty.$$

Hardy type inequalities and boundedness of weighted maximal operators of the t_{n} and T_{n} means on the Hardy spaces and their summability of some general methods were considered by Memich, Person, Tephnadze, Wall and in the works of other authors.

Research goals and objectives

For the partial sums of the Vilkin-Fourier series we proved that:

Theorem 1: a) Let $f \in H_{1}$. Then

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^{n} \left\| S_{k} f \right\|_{1} \leq c \left\| f \right\|_{H_{1}}.$$

b) (sharpness) Let $\varphi : \mathbb{N}_{+} \to [1, \infty)$ be a nondecreasing function satisfying the condition

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\log n / \varphi_{n} \right) = +\infty,$$

Then there exists a

martingale $f \in H_{1}$ such that

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \varphi_{n}} \sum_{k=1}^{n} \left\| S_{k} f \right\|_{1} = \infty.$$

Theorem 2: a) Let $f \in H_{1/2}$. Then

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\sigma_k f\right\|_{1/2}^{1/2} \le c\left\|f\right\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

b) The rate of $\log n$ is in the sence sharp as it was proved in part b) of Theorem 1 for partial sums of Vilenkin-Fourier series.

Theorem 3: a) Let $f \in H_p\left(G_m\right)$ $\left(0<p<1/2\right)$ and $n=\sum_{i=0}^{r} n_i M_i$, $n_i = 0,1,\ldots,m_i-1$. Then

(2.1) $$\left\|\sigma_n f\right\|_{H_p} \le c_p\left(M_{|n|}/M_{\langle n\rangle}\right)^{1/p-2}\left\|f\right\|_{H_p}.$$

b) We also prove sharpness of (2.1):

Theorem 4: Let $f \in H_p\left(G_m\right)$, $0<p<1/2$ and

(2.2) $$\omega_{H_{1/2}(G_m)}\left(f,1/M_{|\alpha_k|}\right)=o\left(\left(M_{\langle\alpha_k\rangle}/M_{|\alpha_k|}\right)^{1/p-2}\right),\quad k\to\infty,$$

then

$$\left\|\sigma_{\alpha_k} f - f\right\|_{H_{1/2}(G_m)} \to 0, \quad \text{as } k\to\infty.$$

b) We also prove sharpness of condition (2.2):

Theorem 5: Let $\left(0<p<1/2\right)$, then there exist a martingale $f \in H_p\left(G_m\right)$, such that

$$\omega_{H_p(G_m)}\left(f,1/M_{|\alpha_k|}\right)=O\left(\left(M_{\langle\alpha_k\rangle}/M_{|\alpha_k|}\right)^{1/p-2}\right), \text{ as } n\to\infty$$

and

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\sigma_{\alpha_k} f - f\right\|_{weak-L_p(G_m)} > c > 0.$$

For the T means we have proved the following:

Theorem 6: a) The maximal operator T^* of the summability method with non-increasing sequence $\{q_k : k \ge 0\}$, is bounded from the Hardy space $H_{1/2}$ to the space $weak-L_{1/2}$.

b) Let $0 < p < 1/2$ and $\{q_k : k \ge 0\}$ is a non-increasing sequence, satisfying the condition $q_{n+1}/Q_{n+2} \ge c/n,$ $(\mathrm{c} \ge 1)$. Then there exists a martingale $f \in H_p$, such that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|T_n f\right\|_{weak-L_p} = \infty.$$

Theorem 7: We prove similar theorem, when $0 < p < 1/2,$ $f \in H_p$ and $\{q_k : k \ge 0\}$ is non-decreasing sequence satisfying the condition

(2.4) $$q_{n-1}/Q_n = O(1/n), \ \mathrm{n} \to \infty.$$

Theorem 8: a) Let $0 < p < 1/2$ and $\{q_k : k \ge 0\}$ is a non-increasing sequence. Then

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|T_k f\right\|_p^p}{k^{2-2p}} \le c_p \left\|f\right\|_{H_p}^p.$$

b) Let $f \in H_{1/2}$ and $\{q_k : k \ge 0\}$ is a non-increasing sequence satisfying the condition $1/Q_n = O(1/n)$, $\mathrm{n} \to \infty$. Then

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\|T_k f\right\|_{1/2}^{1/2}}{k} \le c\left\|f\right\|_{H_{1/2}}^{1/2}.$$

Theorem 9: We prove similar Hardy type inequalities, when $0 < p < 1/2,$ $f \in H_p$ and $\{q_k : k \ge 0\}$ is non-decreasing sequence which satisfying the condition (2.4).

For the logarithmic means of Reisz and Norlund we proved the following inequalities:

Theorem 10: **a)** Let $0 < p < 1/2$ and $f \in H_p(G_m)$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n \| R_n f \|_{H_p(G_m)}^p}{n^{2-2p}} \leq c_p \| f \|_{H_p(G_m)}^p .$$

b) Let $0 < p < 1/2$ and $\Phi : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ be any non-decreasing function, satisfying the condition $\lim_{n\to\infty} \Phi(n) = +\infty.$ Then there exists a martingale $f \in H_p(G)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n \| R_n f \|_p^p \Phi(n)}{n^{2-2p}} = \infty.$$

Theorem 11: Let $0 < p < 1/2$ and $f \in H_p(G_m)$. Then

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\| L_k f \|_p^p}{k^{2-p}} \leq c_p \| f \|_{H_p}^p .$$